反射テスト　数列　部分分数分解　01

1.　次の計算をせよ.（ S 級 1 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}$

(2)　$\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 9}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$

2. 次の計算をせよ.（ S 級 1 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1) $\dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 6} + \dfrac{1}{6 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 10} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-2) \cdot 2n}$

(2) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \dfrac{1}{10 \cdot 13} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}$

反射テスト　数列　部分分数分解　01　解答解説

1.　次の計算をせよ.（ S 級 1 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

★ **部分分数分解**　次の式変形を **部分分数分解** という. A と B はいざとなれば恒等式として導く.

$$\frac{1}{(a_1x+a_2)(b_1x+b_2)}=\frac{A}{a_1x+a_2}+\frac{B}{b_1x+b_2}$$

(1)　$\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

$$=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{(n-1)-(n-2)}{(n-2)\cdot(n-1)}+\frac{n-(n-1)}{(n-1)\cdot n}$$

$$=\left(\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2}\right)+\left(\frac{3}{2\cdot 3}-\frac{2}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{4}{3\cdot 4}-\frac{3}{3\cdot 4}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{n-1}{(n-2)\cdot(n-1)}-\frac{n-2}{(n-2)\cdot(n-1)}\right)+\left(\frac{n}{(n-1)\cdot n}-\frac{n-1}{(n-1)\cdot n}\right)\quad \leftarrow\text{★部分分数分解}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\quad \leftarrow\text{約分}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n-1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}\right)\quad \leftarrow\text{相殺}$$

$$=\mathbf{1-\frac{1}{n}}\quad (\boldsymbol{n=1,2,3,\cdots})$$

$$=\mathbf{\frac{n-1}{n}}\quad (\boldsymbol{n=1,2,3,\cdots})$$

☆この式変形を暗記しておくと, 部分分数分解の計算が早くできる.

(2)　$\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 9}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{2}{(2n-3)\cdot(2n-1)}+\frac{2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right\}\quad\leftarrow☆$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{5-3}{3\cdot 5}+\frac{7-5}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{(2n-3)-(2n-1)}{(2n-3)\cdot(2n-1)}+\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3}{1\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 3}\right)+\left(\frac{5}{3\cdot 5}-\frac{3}{3\cdot 5}\right)+\left(\frac{7}{5\cdot 7}-\frac{5}{5\cdot 7}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2n-1}{(2n-3)\cdot(2n-1)}-\frac{2n-3}{(2n-3)\cdot(2n-1)}\right)+\left(\frac{2n+1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}-\frac{2n-1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)\right\}\quad\leftarrow★$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n-3}}-\cancel{\frac{1}{2n-1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\quad\leftarrow\text{約分と相殺}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\mathbf{\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}}\quad (\boldsymbol{n=1,2,3,\cdots})$$

$$=\mathbf{\frac{n}{2n+1}}\quad (\boldsymbol{n=1,2,3,\cdots})$$

☆ 1(1) のイメージにするために, 分子を 2（分母の差）で考える.

2. 次の計算をせよ.（ S 級 1 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1) $\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 10}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-2)\cdot 2n}$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2\times 1\cdot 2\times 2}+\frac{1}{2\times 2\cdot 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\cdot 2\times 4}+\cdots+\frac{1}{2(n-2)\cdot 2(n-1)}+\frac{1}{2(n-1)\cdot 2n}\\
&=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)}+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right\}\\
&=\frac{1}{4}\left\{\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{(n-1)-(n-2)}{(n-2)\cdot(n-1)}+\frac{n-(n-1)}{(n-1)\cdot n}\right\}\\
&=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2}\right)+\left(\frac{3}{2\cdot 3}-\frac{2}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{4}{3\cdot 4}-\frac{3}{3\cdot 4}\right)+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{n-1}{(n-2)\cdot(n-1)}-\frac{n-2}{(n-2)\cdot(n-1)}\right)+\left(\frac{n}{(n-1)\cdot n}-\frac{n-1}{(n-1)\cdot n}\right)\right\} \quad \leftarrow\bigstar\\
&=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\} \quad \leftarrow\text{約分}\\
&=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n-1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}\right)\right\} \quad \leftarrow\text{相殺}\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{4}-\frac{1}{4n}} \quad \boldsymbol{(n=1,2,3,\cdots)}\\
&=\boldsymbol{\frac{n-1}{4n}} \quad \boldsymbol{(n=1,2,3,\cdots)}
\end{aligned}
$$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\dfrac{1}{10\cdot 13}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{3}\left\{\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{3}{(3n-5)\cdot(3n-2)}+\frac{3}{(3n-2)\cdot(3n+1)}\right\} \quad \leftarrow\text{☆}\\
&=\frac{1}{3}\left\{\frac{4-1}{1\cdot 4}+\frac{7-4}{4\cdot 7}+\frac{10-7}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{(3n-2)-(3n-5)}{(3n-5)\cdot(3n-2)}+\frac{(3n+1)-(3n-2)}{(3n-2)\cdot(3n+1)}\right\}\\
&=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{4}{1\cdot 4}-\frac{1}{1\cdot 4}\right)+\left(\frac{7}{4\cdot 7}-\frac{4}{4\cdot 7}\right)+\left(\frac{10}{7\cdot 10}-\frac{7}{7\cdot 10}\right)+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{3n-2}{(3n-5)\cdot(3n-2)}-\frac{3n-5}{(3n-5)\cdot(3n-2)}\right)+\left(\frac{3n+1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}-\frac{3n-2}{(3n-2)\cdot(3n+1)}\right)\right\} \quad \leftarrow\bigstar\\
&=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{3n-5}}-\cancel{\frac{1}{3n-2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3n-2}}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\} \quad \leftarrow\text{約分と相殺}\\
&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3n+1)}} \quad \boldsymbol{(n=1,2,3,\cdots)}\\
&=\boldsymbol{\frac{n}{3n+1}} \quad \boldsymbol{(n=1,2,3,\cdots)}
\end{aligned}
$$

☆ 1(1) のイメージにするために, 分子を 3（分母の差）で考える.