反射テスト　数列　等差数列×等比数列の和　01

1.　S_n を求めよ.（ S 級 4 分 40 秒, A 級 6 分, B 級 10 分, C 級 15 分 ）

(1)　$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n$

(2)　一般項 $a_n = (2n-1) \cdot 3^{n-1}$ の第 n 項までの和 S_n

2. S_n を求めよ.（ S 級 4 分 40 秒, A 級 6 分, B 級 10 分, C 級 15 分 ）

(1) $S_n = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^{n-1}$

(2) 一般項 $a_n = (3n-2) \cdot 4^n$ の第 n 項までの和 S_n

反射テスト　数列　等差数列×等比数列の和　01　解答解説

1.　S_n を求めよ.（ S 級 4 分 40 秒, A 級 6 分, B 級 10 分, C 級 15 分 ）

★「一般項 $=$ 等差数列の一般項 $\times$ 等比数列の一般項」の形の数列
$S_n \times$ 公比 と S_n との差を考える.

(1)　$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n$

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n \\ 2S_n &= \qquad\quad 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore (1-2)S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k - n \cdot 2^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad -S_n = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1} - n \cdot 2^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad S_n = n \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot (2^n - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{S_n = n \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{S_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)}$$

(2)　一般項 $a_n = (2n-1) \cdot 3^{n-1}$ の第 n 項までの和 S_n

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n-1} \\ 3S_n &= \qquad\quad 1 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 3^{n-1} + (2n-1) \cdot 3^n \end{aligned}$$

$$\therefore (1-3)S_n = 2\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - \mathbf{1} - (2n-1) \cdot 3^n \quad \leftarrow ☆$$
$$\Leftrightarrow \quad -2S_n = 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3-1} - 1 - (2n-1)3^n$$
$$\Leftrightarrow \quad 2S_n = (2n-1)3^n - 3^n + 1 + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad S_n = \frac{(2n-2) \cdot 3^n + 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{S_n = (n-1) \cdot 3^n + 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)}$$

☆ $\mathbf{1} \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1}$
$= \mathbf{2} \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} \mathbf{-1}$

☆ 題意から答えは整数である. 割り切れないときは計算ミスかどうか確かめる.

2. S_n を求めよ.（S 級 4 分 40 秒, A 級 6 分, B 級 10 分, C 級 15 分）

(1) $S_n = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3^3 + \cdots + n\cdot 3^{n-1}$

$$\begin{aligned} S_n &= 1\cdot 3^0 + 2\cdot 3^1 + 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3^3 + \cdots + n\cdot 3^{n-1} \\ 3S_n &= \qquad\quad 1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \cdots + (n-1)\cdot 3^{n-1} + n\cdot 3^n \end{aligned}$$

$\therefore (1-3)S_n = \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - n\cdot 3^n$

$\Leftrightarrow \quad -2S_n = 1\cdot\dfrac{3^n-1}{3-1} - n\cdot 3^n$

$\Leftrightarrow \quad 2S_n = n\cdot 3^n - \dfrac{3^n-1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 2S_n = \dfrac{2n\cdot 3^n - 3^n + 1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{S_n = \dfrac{(2n-1)\cdot 3^n + 1}{4} \qquad (\, n = 1, 2, 3, \cdots \,)}$

☆ 題意から答えは整数である. 割り切れないときは計算ミスかどうか確かめる.

☆ **確かめ** $\begin{cases} a_n = 1 \quad \Rightarrow \quad S_1 = \dfrac{(2\cdot 1 - 1)\cdot 3^1 + 1}{4} = 1 \\ a_n = 6 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \dfrac{(2\cdot 2 - 1)\cdot 3^2 + 1}{4} = 7 = 1 + 6 \end{cases}$

(2) 一般項 $a_n = (3n-2)\cdot 4^n$ の第 n 項までの和 S_n

$$\begin{aligned} S_n &= 1\cdot 4^1 + 4\cdot 4^2 + 7\cdot 4^3 + 10\cdot 4^4 + \cdots + (3n-2)\cdot 4^n \\ 4S_n &= \qquad\quad 1\cdot 4^2 + 4\cdot 4^3 + 7\cdot 4^4 + \cdots + (3n-5)\cdot 4^n + (3n-2)\cdot 4^{n+1} \end{aligned}$$

$\therefore (1-4)S_n = 3\sum_{k=1}^{n} 4^k \boldsymbol{-8} - (3n-2)\cdot 4^{n+1} \quad \leftarrow$☆

$\Leftrightarrow \quad -3S_n = 3\cdot 4\cdot\dfrac{4^n-1}{4-1} - 8 - (3n-2)\cdot 4^{n+1}$

$\Leftrightarrow \quad -3S_n = 4^{n+1} - 4 - 8 - (3n-2)\cdot 4^{n+1}$

$\Leftrightarrow \quad 3S_n = (3n-2)\cdot 4^{n+1} - 4^{n+1} + 12$

$\Leftrightarrow \quad 3S_n = (3n-3)\cdot 4^{n+1} + 12$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{S_n = (n-1)\cdot 4^{n+1} + 4 \qquad (\, n = 1, 2, 3, \cdots \,)}$

☆ $\boldsymbol{1}\cdot 4^1 + 3\cdot 4^2 + 3\cdot 4^3 + 3\cdot 4^4 + \cdots + 3\cdot 4^n$
$= \boldsymbol{3}\cdot 4^1 + 3\cdot 4^2 + 3\cdot 4^3 + 3\cdot 4^4 + \cdots + 3\cdot 4^n \boldsymbol{-8}$

☆ **確かめ** $\begin{cases} a_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad S_1 = (1-1)\cdot 4^2 + 4 = 4 \\ a_2 = 64 \quad \Rightarrow \quad S_2 = (2-1)\cdot 4^3 + 4 = 68 = 4 + 64 \\ a_3 = 7\cdot 64 \quad \Rightarrow \quad S_3 = (3-1)\cdot 4^4 + 4 = 516 = 4 + 64 + 7\cdot 64 \end{cases}$