反射テスト　数列　基本的な数列の和　01

1.　次の S を求めよ.（ S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

(1)　$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 128$

(2)　$S = 7 + 4 + 1 - 2 - \cdots - 77$

(3)　$S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{11}{2}$

(4)　$S = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + 2 - 4 + \cdots + 32$

2. 次の S を求めよ.（S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分）

(1) $S = 1 - 3 + 9 - 27 + \cdots + 729$

(2) $S = 4 + 7 + 10 + 13 + \cdots + 97$

(3) $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{9}{2}$

(4) $S = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{128}$

反射テスト　数列　基本的な数列の和　01　解答解説

1.　次の S を求めよ.（S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分）

★ 初項 a , 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項　$\boldsymbol{a_n = a + d(n-1)}$

第 n 項までの和　$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$

★ 初項 a , 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項　$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$

第 n 項までの和　$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \dfrac{a\,(r^n - 1)}{r-1} = \dfrac{a\,(1 - r^n)}{1-r}$

(1)　$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 128$

初項 1 , 公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$
一般項 $a_n = 2^{n-1}$

$a_n = 128 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^7 \Leftrightarrow n = 8$

$S = \dfrac{1(2^8 - 1)}{2-1}$

$= \mathbf{255}$

(2)　$S = 7 + 4 + 1 - 2 - \cdots - 77$

初項 7 , 公差 -3 の等差数列 $\{a_n\}$
一般項 $a_n = 7 - 3(n-1) = -3n + 10$

$a_n = -77 \Leftrightarrow -3n + 10 = -77 \Leftrightarrow n = 29$

$S = \dfrac{(7 - 77) \times 29}{2}$

$= -35 \times 29$

$= \mathbf{-1015}$

(3)　$S = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6} + \dfrac{3}{2} + \cdots + \dfrac{11}{2}$

初項 $-\frac{1}{2}$, 公差 $\frac{2}{3}$ の等差数列 $\{a_n\}$
一般項 $a_n = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2}{3}n - \frac{7}{6}$

$a_n = \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3}n - \frac{7}{6} = \frac{11}{2}$
$\Leftrightarrow 4n - 7 = 33 \Leftrightarrow n = 10$

$S = \dfrac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{11}{2}\right) \times 10}{2}$

$= \mathbf{25}$

(4)　$S = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} - 1 + 2 - 4 + \cdots + 32$

初項 $-\frac{1}{4}$, 公比 -2 の等比数列 $\{a_n\}$
一般項 $a_n = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^{n-1}$

$a_n = 64 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \cdot (-2)^{n-1} = 2^5 \Leftrightarrow n = 8$

$S = \dfrac{-\frac{1}{4}\left\{1 - (-2)^8\right\}}{1 - (-2)}$

$= -\dfrac{1}{12}(1 - 256)$

$= \mathbf{\dfrac{85}{4}}$

★ $2^8 = 256$, $2^{10} = 1024$

2. 次の S を求めよ.（S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分）

(1) $S = 1 - 3 + 9 - 27 + \cdots + 729$

初項 1，公比 3 の等比数列 $\{a_n\}$
一般項 $a_n = (-3)^{n-1}$

$a_n = 729 \Leftrightarrow (-3)^{n-1} = 3^6 \Leftrightarrow n = 7$

$$S = \frac{1\left\{1-(-3)^7\right\}}{1-(-3)}$$
$$= \frac{1}{4}(1+2187)$$
$$= \mathbf{547}$$

(2) $S = 4 + 7 + 10 + 13 + \cdots + 97$

初項 4，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$
一般項 $a_n = 4 + 3(n-1) = 3n + 1$

$a_n = 97 \Leftrightarrow 3n + 1 = 97 \Leftrightarrow n = 32$

$$S = \frac{(4+97)\times 32}{2}$$
$$= \mathbf{1616}$$

(3) $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{9}{2}$

初項 $\frac{1}{2}$，公差 $-\frac{1}{3}$ の等差数列 $\{a_n\}$
一般項 $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(n-1) = -\frac{1}{3}n + \frac{5}{6}$

$a_n = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}n + \frac{5}{6} = -\frac{9}{2}$
$\Leftrightarrow -2n + 5 = -27 \Leftrightarrow n = 16$

$$S = \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right)\times 16}{2}$$
$$= \mathbf{-32}$$

(4) $S = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{128}$

初項 2，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列 $\{a_n\}$
一般項 $a_n = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = \frac{1}{128} \Leftrightarrow \frac{2}{(-2)^{n-1}} = \frac{1}{128} \Leftrightarrow n = 9$

$$S = \frac{2\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^9\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \frac{4}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^9\right\}$$
$$= \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{512}\right)$$
$$= \frac{4}{3}\times\frac{513}{512}$$
$$= \mathbf{\frac{171}{128}}$$

★ $2^8 = 256$，$2^{10} = 1024$