反射テスト　式変形と証明　対称式と交代式　応用　01

1.　a, b, c, d が次の条件を満たす. 次の問に答えよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

$$a = \frac{x+y+z}{2} \qquad b = a - x \qquad c = a - y \qquad d = a - z$$

(1)　$a+b+c+d$ を x, y, z で表せ.

(2)　$a^2+b^2+c^2+d^2$ を x, y, z で表せ.

(3)　(1), (2) の結果を用いて, 下の 2 つの等式を満たす（ a, b, c, d ）を 1 組求めよ.

$$\begin{cases} a+b+c+d = 14+15+19 \\ a^2+b^2+c^2+d^2 = 14^2+15^2+19^2 \end{cases}$$

2.　$a\,,\,b\,,\,c\,,\,d$ が次の条件を満たす．次の問に答えよ．(S 級 3 分，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分)

$$a=\frac{x+y+z}{2}\qquad b=x-\frac{a}{3}\qquad c=y-\frac{a}{3}\qquad d=z-\frac{a}{3}$$

(1)　$a+b+c+d$ を $x\,,\,y\,,\,z$ で表せ．

(2)　$a^2+b^2+c^2+d^2$ を $x\,,\,y\,,\,z$ で表せ．

(3)　(1), (2) の結果を用いて，下の 2 つの等式を満たす $(a\,,\,b\,,\,c\,,\,d)$ を 1 組求めよ．

$$\begin{cases} a+b+c+d=14+15+19 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=14^2+15^2+19^2 \end{cases}$$

反射テスト　式変形と証明　対称式と交代式　応用　01　解答解説

1.　a, b, c, d が次の条件を満たす. 次の問に答えよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

$$a=\frac{x+y+z}{2} \qquad b=a-x \qquad c=a-y \qquad d=a-z$$

★ 対称式　どの 2 つの文字を入れ替えても, 元の式と同じになるものを対称式という.
★ 交代式　どの 2 つの文字を入れ替えても, 元の式と符号だけが変わるものを交代式という.

(1)　$a+b+c+d$ を x, y, z で表せ.

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= a+(a-x)+(a-y)+(a-z) \\ &= 4a-(x+y+z) \\ &= 4\times\frac{x+y+z}{2}-(x+y+z) \\ &= 2(x+y+z)-(x+y+z) \\ &= \boldsymbol{x+y+z} \end{aligned}$$

(2)　$a^2+b^2+c^2+d^2$ を x, y, z で表せ.

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+d^2 &= a^2+(a-x)^2+(a-y)^2+(a-z)^2 \\ &= 4a^2-2ax-2ay-2az+x^2+y^2+z^2 \\ &= 4a^2-2a(x+y+z)+x^2+y^2+z^2 \\ &= 4\times\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2-2\times\frac{x+y+z}{2}\times(x+y+z)+x^2+y^2+z^2 \\ &= (x+y+z)^2-(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2 \\ &= \boldsymbol{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}$$

★結論 $\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2+\left(\frac{x+y+z}{2}-x\right)^2+\left(\frac{x+y+z}{2}-y\right)^2+\left(\frac{x+y+z}{2}-z\right)^2=x^2+y^2+z^2$

$\Leftrightarrow$ $\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2+\left(\frac{-x+y+z}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y+z}{2}\right)^2+\left(\frac{x+y-z}{2}\right)^2=x^2+y^2+z^2$

(3)　(1), (2) の結果を用いて, 下の 2 つの等式を満たす（a, b, c, d）を 1 組求めよ.

$$\begin{cases} a+b+c+d=14+15+19 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=14^2+15^2+19^2 \end{cases}$$

$x=14$, $y=15$, $z=19$ とすれば,

$a=\dfrac{14+15+19}{2}=24$,　$b=24-14=10$,　$c=24-15=9$,　$d=24-19=5$

$\therefore$　**(24 , 10 , 9 , 5)**

2. $a\,,b\,,c\,,d$ が次の条件を満たす. 次の問に答えよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

$$a=\frac{x+y+z}{2} \qquad b=x-\frac{a}{3} \qquad c=y-\frac{a}{3} \qquad d=z-\frac{a}{3}$$

(1) $a+b+c+d$ を $x\,,y\,,z$ で表せ.

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= a+\left(x-\frac{a}{3}\right)+\left(y-\frac{a}{3}\right)+\left(z-\frac{a}{3}\right) \\ &= a+x+y+z-a \\ &= \boldsymbol{x+y+z} \end{aligned}$$

(2) $a^2+b^2+c^2+d^2$ を $x\,,y\,,z$ で表せ.

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+d^2 &= a^2+\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+\left(z-\frac{a}{3}\right)^2 \\ &= a^2+x^2-\frac{2}{3}ax+\frac{a^2}{9}+y^2-\frac{2}{3}ay+\frac{a^2}{9}+z^2-\frac{2}{3}az+\frac{a^2}{9} \\ &= \frac{4}{3}a^2-\frac{2}{3}a(x+y+z)+x^2+y^2+z^2 \\ &= \frac{4}{3}\times\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2-\frac{2}{3}\times\frac{x+y+z}{2}\times(x+y+z)+x^2+y^2+z^2 \\ &= \frac{1}{3}(x+y+z)^2-\frac{1}{3}(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2 \\ &= \boldsymbol{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}$$

★結論 $\left(\dfrac{x+y+z}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{x+y+z}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{x+y+z}{6}\right)^2+\left(z-\dfrac{x+y+z}{6}\right)^2=x^2+y^2+z^2$

(3) (1), (2) の結果を用いて, 下の 2 つの等式を満たす（$a\,,b\,,c\,,d$）を 1 組求めよ.

$$\begin{cases} a+b+c+d=14+15+19 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=14^2+15^2+19^2 \end{cases}$$

$x=14\,,\ y=15\,,\ z=19$ とすれば,

$$a=\frac{14+15+19}{2}=24\,,\quad b=14-\frac{24}{3}=6\,,\quad c=15-\frac{24}{3}=7\,,\quad d=19=\frac{24}{3}=11$$

$\therefore$ **(24 , 6 , 7 , 11)**