

反射テスト 式変形と証明 相加平均と相乗平均 02

1. a, b が正の実数であるとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ. また等号成立の条件も言え.

(S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分)

$$(1) \quad \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$$

$$(2) \quad \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 9$$

2. a, b が正の実数であるとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また等号成立の条件も言え。

(S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分)

$$(1) \quad a + b + \frac{4}{a+b} \geq 4$$

$$(2) \quad \left(2\sqrt{a} + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{2}{\sqrt{a}}\right) \geq 9$$

反射テスト 式変形と証明 相加平均と相乗平均 02 解答解説

1. a, b が正の実数であるとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また等号成立の条件も言え。

(S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分)

★ 相加平均 $\geq$ 相乗平均

$$a, b \text{ が正のとき, } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \left(\Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \right)$$

等号は $a = b$ のときに成立する。

$$(1) \quad \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$$

$$a > 0, b > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0, \frac{a}{b} > 0$$

相加平均と相乗平均の関係より,

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$$

等号成立は $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ のとき,

すなわち, $a = b$ のときである。

(a, b は正だから, $a = -b$ はあり得ない。)

☆相加相乗を使うときは材料が正であることを必ず言う。

$$(2) \quad \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 9$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= ab + a \cdot \frac{4}{a} + \frac{1}{b} \cdot b + \frac{4}{ab} \\ &= ab + \frac{4}{ab} + 5 \end{aligned}$$

$$a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0, \frac{4}{ab} > 0$$

相加平均と相乗平均の関係より,

$$\text{左辺} \geq 2\sqrt{(ab) \cdot \frac{4}{ab}} + 5 = 9$$

等号成立は $ab = \frac{4}{ab}$ のとき,

すなわち, $ab = 2$ のときである。

(a, b は正だから, $ab = -2$ はあり得ない。)

2. a, b が正の実数であるとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また等号成立の条件も言え。

(S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分)

$$(1) \quad a + b + \frac{4}{a+b} \geq 4$$

$$a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0, \frac{4}{a+b} > 0$$

相加平均と相乗平均の関係より,

$$a + b + \frac{4}{a+b} \geq 2\sqrt{(a+b) \cdot \frac{4}{a+b}} = 4$$

等号成立は $a + b = \frac{4}{a+b}$ のとき,

すなわち, $a + b = 2$ のとき等号成立である.

(a, b は正だから, $a + b = -2$ はあり得ない.)

$$(2) \quad \left(2\sqrt{a} + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{2}{\sqrt{a}}\right) \geq 9$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{a} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{1}{b} \cdot b + \frac{2}{\sqrt{ab}} \\ &= 2\sqrt{ab} + \frac{2}{\sqrt{ab}} + 5 \end{aligned}$$

$$a > 0, b > 0 \Rightarrow 2\sqrt{ab} > 0, \frac{2}{\sqrt{ab}} > 0$$

相加平均と相乗平均の関係より,

$$\text{左辺} \geq 2\sqrt{(2\sqrt{ab}) \cdot \frac{2}{\sqrt{ab}}} + 5 = 9$$

等号成立は $2\sqrt{ab} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$ のとき,

すなわち, $ab^2 = 1$ のときである.