反射テスト　式変形と証明　相加平均と相乗平均　01

1.　$x > 0$ のとき, 次の式の最小値とその条件を求めよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 30 秒, C 級 5 分 ）

(1)　$x + \dfrac{1}{x}$

(2)　$4x - 1 + \dfrac{1}{2x}$

(3)　$x^2 - x + 3 + \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$

2. $x > 0$ のとき, 次の式の最小値とその条件を求めよ.（S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分 30 秒）

(1) $\sqrt{x} + 2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(2) $x + \dfrac{5}{x+2}$

(3) $x^2 - 3x + 4 + \dfrac{1}{x^2 - 3x + 3}$

反射テスト　式変形と証明　相加平均と相乗平均　01　解答解説

1.　$x>0$ のとき，次の式の最小値とその条件を求めよ．（ S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分，B 級 3 分 30 秒，C 級 5 分 ）

★ 相加平均 $\geqq$ 相乗平均
a, b が正のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$　$\left(\Leftrightarrow \quad a+b \geqq 2\sqrt{ab}\right)$
等号は $a=b$ のときに成立する．

(1)　$x+\dfrac{1}{x}$

$x>0 \Rightarrow \dfrac{1}{x}>0$
相加平均と相乗平均の関係から，
$x+\dfrac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x\times\dfrac{1}{x}}=2$
等号成立は　$x=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x=1$　（ $\because\ x>0$ ）

答え　$\boldsymbol{x=1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{2}$ をとる．

(2)　$4x-1+\dfrac{1}{2x}$

$x>0 \Rightarrow 4x>0$ かつ $\dfrac{1}{2x}>0$

相加平均と相乗平均の関係から，
$4x-1+\dfrac{1}{2x} \geqq 2\sqrt{4x\times\dfrac{1}{2x}}-1=2\sqrt{2}-1$
等号成立は　$4x=\dfrac{1}{2x} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　（ $\because\ x>0$ ）

答え　$\boldsymbol{x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}-1}$ をとる．

(3)　$x^2-x+3+\dfrac{1}{x^2-x+1}$

$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^2-x+1}>0$

相加平均と相乗平均の関係から，
与式 $=(x^2-x+1)+2+\dfrac{1}{x^2-x+1}$
$\quad \geqq 2\sqrt{(x^2-x+1)\times\dfrac{1}{x^2-x+1}}+2=2+2=4$
等号成立は　$x^2-x+1=\dfrac{1}{x^2-x+1}$
$\Leftrightarrow \quad (x^2-x+1)^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x+1=\pm 1$
$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-x+1=1 & \Leftrightarrow \quad x=0,1 \\ x^2-x+1=-1 & \Rightarrow \quad x \text{ は実数解を持たない．} \end{cases}$
$x>0$ より $x=1$ のときだけ等号成立．

答え　$\boldsymbol{x=1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{4}$ をとる．

2. $x>0$ のとき，次の式の最小値とその条件を求めよ．(S 級 1 分 40 秒，A 級 2 分 50 秒，B 級 4 分 30 秒，C 級 6 分 30 秒)

(1) $\sqrt{x}+2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$x>0 \Rightarrow \sqrt{x}>0$ かつ $\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0$

相加平均と相乗平均の関係から，

与式 $\geqq 2\sqrt{\sqrt{x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+2=2+2=4$

等号成立は $\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x=1$

答え $\boldsymbol{x=1}$ のとき最小値 **4** をとる．

(2) $x+\dfrac{5}{x+2}$

与式 $=(x+2)-2+\dfrac{5}{x+2}$

$x>0 \Rightarrow x+2>0$ かつ $\dfrac{5}{x+2}>0$

相加平均と相乗平均の関係から，

与式 $\geqq 2\sqrt{x+2\times\dfrac{5}{x+2}}-2=2\sqrt{5}-2$

等号成立は $x+2=\dfrac{5}{x+2} \Leftrightarrow (x+2)^2=5 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}-2$ ($\because x>0$)

答え $\boldsymbol{x=\sqrt{5}-2}$ のとき最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{5}-2}$ をとる．

(3) $x^2-3x+4+\dfrac{1}{x^2-3x+3}$

$x^2-3x+3=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^2-3x+3}>0$

相加平均と相乗平均の関係から，

$$\begin{aligned}\text{与式}&=(x^2-3x+3)+1+\frac{1}{x^2-3x+3}\\&\geqq 2\sqrt{(x^2-3x+3)\times\frac{1}{x^2-3x+3}}+1=2+1=3\end{aligned}$$

等号成立は $x^2-3x+3=\dfrac{1}{x^2-3x+3}$

$\Leftrightarrow \quad (x^2-3x+3)^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3x+3=\pm1$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-3x+3=1 & \Leftrightarrow \quad x=1,2 \\ x^2-3x+3=-1 & \Rightarrow \quad x \text{ は実数解を持たない．}\end{cases}$

$x>0$ より $x=1,2$ のとき等号成立．

答え $\boldsymbol{x=1,2}$ のとき最小値 **3** をとる．