反射テスト　式変形と証明　式の大小　応用　01

1.　$x>0$, $y>0$, $z>0$ のとき, $\dfrac{x+y+z}{3}$ と $\sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{3}}$ の大小を調べよ. 証明もすること.

（ S 級 2 分 10 秒, A 級 4 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

2. $x>0$, $y>0$, $z>0$ のとき, $\sqrt{\dfrac{3xyz}{x+y+z}}$ と $\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}$ の大小を調べよ. 証明もすること.

（ S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 9 分, C 級 14 分 ）

反射テスト　式変形と証明　式の大小　応用　01　解答解説

1.　$x>0$, $y>0$, $z>0$ のとき, $\dfrac{x+y+z}{3}$ と $\sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{3}}$ の大小を調べよ. 証明もすること.

（ S 級 2 分 10 秒, A 級 4 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

証明

$x>0$, $y>0$, $z>0$ から, $\dfrac{x+y+z}{3}>0$ かつ $\sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{3}}>0$

☆よって, 2 乗の差（平方差）を比べる.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}\right)^2&=\frac{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)}{9}\\&=\frac{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}{9}\\&=\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{18}\geqq 0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}\leqq\frac{x+y+z}{3}$$

等号成立は,　$x-y=0$ かつ $y-z=0$ かつ $z-x=0$　のとき.

$\Leftrightarrow$　$x=y=z$　のときである.

☆次の恒等式を知っていると早い.

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ =\ \frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\}$$

2. $x>0$, $y>0$, $z>0$ のとき，$\sqrt{\dfrac{3xyz}{x+y+z}}$ と $\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}$ の大小を調べよ．証明もすること．

（ S 級 3 分 30 秒，A 級 5 分，B 級 9 分，C 級 14 分 ）

証明

$x>0$, $y>0$, $z>0$ から，$\sqrt{\dfrac{3xyz}{x+y+z}}>0$ かつ $\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}>0$

☆よって，2 乗の差（平方差）を比べる．

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{3xyz}{x+y+z}}\right)^2-\left(\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right)^2&=\frac{3xyz}{x+y+z}-\frac{(xy+yz+zx)^2}{(x+y+z)^2}\\&=\frac{3xyz(x+y+z)-(xy+yz+zx)^2}{(x+y+z)^2}\end{aligned}$$

ここで，$a=yz$, $b=zx$, $c=xy$ とおくと，

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{3xyz}{x+y+z}}\right)^2-\left(\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right)^2&=\frac{3(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2}{(x+y+z)^2}\\&=-\frac{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)}{(x+y+z)^2}\\&=-\frac{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)}{(x+y+z)^2}\\&=-\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2(x+y+z)^2}\leqq 0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sqrt{\frac{3xyz}{x+y+z}}\leqq\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$$

等号成立は，　$a-b=0$ かつ $b-c=0$ かつ $c-a=0$　のとき．

$\Leftrightarrow\quad a=b=c$

$\Leftrightarrow\quad xy=yz=zx$

$\Leftrightarrow\quad x=y=z$　のときである．　（ $\because\ xyz\neq 0$ より ）