

反射テスト 式変形と証明 式の大小 02

1. $0 < a < 1$ のとき, 次の式の大小を不等式で表せ. 証明もすること. (S 級 3 分, A 級 4 分 30 秒, B 級 6 分, C 級 9 分)

(1) $a, a^2, \frac{1}{a}$

(2) $a+1, a-1, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{a-1}$

2. $0 < a < 1$ のとき, 次の式の大小を不等式で表せ. 証明もすること. (S 級 4 分, A 級 5 分 30 秒, B 級 8 分, C 級 12 分)

(1) $\sqrt{a}, a, \frac{1}{\sqrt{a}}$

(2) $(1+a)^2, 1-a, a(1-a), \frac{1}{1+a}$

反射テスト 式変形と証明 式の大小 02 解答解説

1. $0 < a < 1$ のとき、次の式の大小を不等式で表せ。証明もすること。(S 級 3 分, A 級 4 分 30 秒, B 級 6 分, C 級 9 分)

★ 大小の判定

- ① 差をとって正負を判定する.
- ② ともに正ならば 2 乗の差 (平方差) の正負を判定する.

☆ 3 つ以上の式を比べる場合は、事前に適当な数を代入して大小関係を調べ、大きい順に証明していくのがよいだろう。別に小さい順でもかまわないが、式の差が正になる方がミスが少ない。

$$(1) \quad a, a^2, \frac{1}{a}$$

☆ 差をとって正負を判定する.

$$\frac{1}{a} - a = \frac{1-a^2}{a} = \frac{(1+a)(1-a)}{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < \frac{1}{a}$$

$$a - a^2 = a(1-a) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < a$$

$$\therefore \quad a^2 < a < \frac{1}{a}$$

$$(2) \quad a+1, a-1, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{a-1}$$

☆ 準備 $\frac{1}{2}$ を代入して、大小関係を把握してから、証明した方が手間が減る。

$$a+1 = \frac{3}{2}, \quad a-1 = -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a+1} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{a-1} = -2$$

$$a+1 - \frac{1}{a+1} = \frac{(a+1)^2 - 1}{a+1} = \frac{a^2 + 2a}{a+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a+1} < a+1$$

$$\frac{1}{a+1} - (a-1) = \frac{1 - (a+1)(a-1)}{a+1} = \frac{2-a^2}{a+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a-1 < \frac{1}{a+1}$$

$$(a-1) - \frac{1}{a-1} = \frac{(a-1)^2 - 1}{a-1} = \frac{a^2 - 2a}{a-1} = \frac{a(a-2)}{a-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a-1} < a-1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a-1} < a-1 < \frac{1}{a+1} < a+1$$

☆ 別解

$$0 < a < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < a+1 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{a+1} < 1$$

$$0 < a < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < a-1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a-1} < -1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a-1} < a-1 < \frac{1}{a+1} < a+1$$

☆ この解法は範囲がかぶらない場合は有効である。いつも使える方法ではないが、範囲がかぶらないのであれば早い解法である。(実際 1(1) では使えない。)

2. $0 < a < 1$ のとき、次の式の大小を不等式で表せ。証明もすること。(S 級 4 分, A 級 5 分 30 秒, B 級 8 分, C 級 12 分)

(1) $\sqrt{a}, a, \frac{1}{\sqrt{a}}$

☆どの式も正なので、平方して比べる。

$$\begin{cases} (\sqrt{a})^2 = a \\ (a)^2 = a^2 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\frac{1}{a} - a = \frac{1 - a^2}{a} = \frac{(1 + a)(1 - a)}{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} < \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$a - a^2 = a(1 - a) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < \sqrt{a}$$

$$\therefore a < \sqrt{a} < \frac{1}{\sqrt{a}}$$

(2) $(1 + a)^2, 1 - a, a(1 - a), \frac{1}{1 + a}$

☆準備 $\frac{1}{2}$ を代入して、大小関係を把握してから、証明した方が手間が減る。

$$(1 + a)^2 = \frac{9}{4}, \quad 1 - a = \frac{1}{2}, \quad a(1 - a) = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{1 + a} = \frac{2}{3}$$

$$(1 + a)^2 - \frac{1}{1 + a} = \frac{(1 + a)^3 - 1}{1 - a} = \frac{3a + 3a^2 + a^3}{1 - a} > 0 \quad (\because \text{分母分子ともに正})$$

$$\therefore \frac{1}{1 + a} < (1 + a)^2$$

$$\frac{1}{1 + a} - (1 - a) = \frac{1 - (1 + a)(1 - a)}{1 + a} = \frac{a^2}{1 + a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - a < \frac{1}{1 + a}$$

$$(1 - a) - a(1 - a) = (1 - a)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(1 - a) < 1 - a$$

$$\therefore a(1 - a) < 1 - a < \frac{1}{1 + a} < (1 + a)^2$$