

反射テスト 式変形と証明 式の大小 01

1. $0 < a < b$ のとき, 次の式の大小を不等式で表せ. 証明もすること. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) $b, \frac{a+b}{2}$

(2) $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$

(3) $\sqrt{a+b}, \sqrt{a} + \sqrt{b}$

2. $0 < a < b$ のとき, 次の式の大小を不等式で表せ. 証明もすること. (S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 5 分, C 級 8 分)

(1) $a, \frac{a+b}{2}$

(2) $a^2 + b^2, 2ab$

(3) $\sqrt{b-a}, \sqrt{b} - \sqrt{a}$

反射テスト 式変形と証明 式の大小 01 解答解説

1. $0 < a < b$ のとき、次の式の大小を不等式で表せ。証明もすること。(S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

★ 大小の判定

- ① 差をとって正負を判定する.
- ② とともに正ならば 2 乗の差 (平方差) の正負を判定する.

☆ 答えを求めるだけなら、適当な値を代入してしまえばよい。しかし、一般的に成り立つかどうかは別問題である。

$$(1) \quad b, \frac{a+b}{2}$$

$$(2) \quad \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$$

$$\begin{aligned} b - \frac{a+b}{2} &= \frac{2b - (a+b)}{2} \\ &= \frac{b-a}{2} > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a < b \Leftrightarrow b - a > 0$$

$$\therefore \frac{a+b}{2} < b$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} &= \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \\ &= \frac{(b+a)(b-a)}{a^2 b^2} > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore 0 < a < b \Rightarrow b - a > 0 \text{ かつ } b + a > 0 \text{ かつ } a^2 b^2 > 0$$

$$\therefore \frac{1}{b^2} < \frac{1}{a^2}$$

$$(3) \quad \sqrt{a+b}, \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

☆ 2 つの式は共に 0 より大きいから、平方差を考える。

$$\begin{aligned} (\sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &= (a+b) - (a + 2\sqrt{ab} + b) \\ &= -2\sqrt{ab} < 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

2. $0 < a < b$ のとき、次の式の大小を不等式で表せ。証明もすること。(S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 5 分, C 級 8 分)

(1) $a, \frac{a+b}{2}$

(2) $a^2 + b^2, 2ab$

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{2a - (a+b)}{2}$$

$$= \frac{a-b}{2} < 0$$

$$\therefore a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

$$\therefore a < \frac{a+b}{2}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 > 0 \quad (\because a \neq b)$$

$$\therefore 2ab < a^2 + b^2$$

(3) $\sqrt{b-a}, \sqrt{b} - \sqrt{a}$

☆ 2 つの式は共に 0 より大きいから、平方差を考える。

$$(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 = (b-a) - (b - 2\sqrt{ab} + a)$$

$$= 2\sqrt{ab} - 2a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0$$

$$\therefore 0 < a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$$

$$\therefore \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$$

☆別解

①から、 $2(\sqrt{ab} - a)$ の正負を調べる。

$\sqrt{ab}, a$ は共に正であるから、平方差を考えて、

$$(\sqrt{ab})^2 - a^2 = ab - a^2 = a(b-a) > 0$$

$$\therefore 2(\sqrt{ab} - a) > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$$