反射テスト　式変形と証明　不等式の証明　いろいろ　01

1.　実数 a, b, c に対して次の不等式を証明せよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$a^2 + b^2 \geqq ab$

(2)　$a^2 + \dfrac{1}{a^2} \geqq 2$

(3)　$a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$

2. 実数 a, b, x, y に対して次の不等式を証明せよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1) $\dfrac{a^2}{2} + 2b^2 \geqq 2ab$

(2) $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} \geqq 2$

(3) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqq (ax + by)^2$

反射テスト　式変形と証明　不等式の証明　いろいろ　01　解答解説

1. 実数 a, b, c に対して次の不等式を証明せよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

★ 不等式の証明①　$\boldsymbol{A \geqq B \Leftrightarrow A - B \geqq 0}$

★ 不等式の証明②　**$\boldsymbol{A, B}$ が共に 0 以上の実数であるとき,**　$\boldsymbol{A \geqq B \Leftrightarrow A^2 - B^2 \geqq 0}$

☆②を用いるときは, 必ず両辺が 0 以上であることを言うこと.

★ $\boldsymbol{|A| \geqq A}$

証明

$A \geqq 0$ のとき　左辺 $-$ 右辺 $= A - A = 0$

$A < 0$ のとき　左辺 $-$ 右辺 $= -A - A = -2A > 0$（ $\because A < 0 \Leftrightarrow -2A > 0$ ）

ゆえにどちらの場合も 左辺 $\geqq$ 右辺 を満たす. 等号成立は, $A \geqq 0$ のときである.

(1)　$a^2 + b^2 \geqq ab$

証明

左辺 $-$ 右辺 $= a^2 - ab + b^2$

$= \left(a - \dfrac{1}{2}b\right)^2 + \dfrac{3}{4}b^2 \geqq 0$

$\therefore$　左辺 $\geqq$ 右辺

等号成立は, $a = b = 0$ のとき.

☆別解

左辺 $-$ 右辺 $= \dfrac{1}{2}(2a^2 - 2ab + 2b^2)$

$= \dfrac{1}{2}\left\{a^2 + b^2 + (a - b)^2\right\} \geqq 0$

(2)　$a^2 + \dfrac{1}{a^2} \geqq 2$

証明

題意から, $a \neq 0$

よって, a^2, $\dfrac{1}{a^2}$ 共に正である.

相加平均と相乗平均の関係から,

左辺 $\geqq 2\sqrt{a^2 \times \dfrac{1}{a^2}} = 2$

$\therefore$　左辺 $\geqq$ 右辺

等号成立は, $a^2 = \dfrac{1}{a^2} \Leftrightarrow a^4 = 1$

a は実数であるから, $a = \pm 1$ のとき等号成立.

(3)　$a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$

証明

左辺 $-$ 右辺 $= \dfrac{1}{2}\left(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left\{\left(a^2 - 2ab + b^2\right) + \left(b^2 - 2bc + c^2\right) + \left(c^2 - 2ca + a^2\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right\} \geqq 0$

$\therefore$　左辺 $\geqq$ 右辺

等号成立は, $a - b = 0$ かつ $b - c = 0$ かつ $c - a = 0$

ゆえに, $a = b = c$ のとき等号成立.

☆この式変形は覚えておくといいだろう. 頻出.

★ 3 次元のコーシー・シュワルツの不等式

$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geqq (ax + by + cz)^2$

$x = b$, $y = c$, $z = a$ とすれば 1(3) を証明できる.

2.　実数 a, b, x, y に対して次の不等式を証明せよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$\dfrac{a^2}{2}+2b^2 \geqq 2ab$

証明

$$\begin{aligned}\text{左辺}-\text{右辺} &= \frac{a^2}{2}-2ab+2b^2\\ &= \frac{1}{2}\left(a^2-4ab+4b^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(a-2b)^2\end{aligned}$$

∴　左辺 $\geqq$ 右辺

等号成立は, $a=2b$ のとき.

☆別解　相加・相乗の平均を使ってもよい.

(2)　$\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2} \geqq 2$

証明

題意から, $ab \neq 0$

よって, $\dfrac{a^2}{b^2}$, $\dfrac{b^2}{a^2}$ 共に正である.

相加平均と相乗平均の関係から,

$$\text{左辺} \geqq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\times\frac{b^2}{a^2}}=2$$

∴　左辺 $\geqq$ 右辺

等号成立は, $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow a^4=b^4$

a, b は実数であるから, $a=\pm b$ のとき等号成立.

(3)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

証明

$$\begin{aligned}\text{左辺}-\text{右辺} &= a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\\ &\qquad -(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)\\ &= a^2y^2-2\cdot ay\cdot bx+b^2x^2\\ &= (ay-bx)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

∴　左辺 $\geqq$ 右辺

等号成立は, $ay=bx$ のとき等号成立.

★2 次元のコーシー・シュワルツの不等式

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

ちなみに $x=b$, $y=a$ とすれば 1(1) を証明できる.