反射テスト　式変形と証明　不等式の証明　02

1.　実数 a, b に対して次の不等式を証明せよ．等号成立の条件も言え．ただし，$|A| \geqq A$ は証明せずに使っていいものとする．

（S 級 1 分 30 秒，A 級 3 分 30 秒，B 級 5 分，C 級 7 分）

(1)　$\sqrt{a+b} \leqq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
（ただし，a, b は 0 以上の実数．）

(2)　$|a+b| \leqq |a| + |b|$

2. 実数 a, b に対して次の不等式を証明せよ．等号成立の条件も言え．ただし，$|A| \geqq A$ は証明せずに使っていいものとする．
（ S 級 2 分，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 8 分 ）

(1) $\sqrt{a^2 - ab + b^2} \geqq \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$

(2) $|a - b| \geqq |a| - |b|$

反射テスト　式変形と証明　不等式の証明　02　解答解説

1.　実数 a,b に対して次の不等式を証明せよ．等号成立の条件も言え．ただし，$|A| \geqq A$ は証明せずに使っていいものとする．

（ S 級 1 分 30 秒，A 級 3 分 30 秒，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

★ 不等式の証明①　　$\boldsymbol{A \geqq B \Leftrightarrow A - B \geqq 0}$

★ 不等式の証明②　　**$\boldsymbol{A, B}$ が共に 0 以上の実数であるとき，**　$\boldsymbol{A \geqq B \Leftrightarrow A^2 - B^2 \geqq 0}$

☆②を用いるときは，必ず両辺が 0 以上であることを言うこと．

★ $\boldsymbol{|A| \geqq A}$

証明

$A \geqq 0$ のとき　左辺 $-$ 右辺 $= A - A = 0$

$A < 0$ のとき　左辺 $-$ 右辺 $= -A - A = -2A > 0$（ $\because A < 0 \Leftrightarrow -2A > 0$ ）

ゆえにどちらの場合も 左辺 $\geqq$ 右辺 を満たす．等号成立は，$A \geqq 0$ のときである．

(1)　$\sqrt{a+b} \leqq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

（ ただし，a,b は 0 以上の実数．）

☆単純に右辺 $-$ 左辺では加減がしにくい．

$\sqrt{}$ があるときは，平方（2 乗）を比べる．

証明

左辺，右辺ともに 0 以上の実数であるから，

$$\begin{aligned} 右辺^2 - 左辺^2 &= \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{a+b}\right)^2 \\ &= a + 2\sqrt{ab} + b - (a+b) \\ &= 2\sqrt{ab} \geqq 0 \end{aligned}$$

$\therefore$　左辺 $\leqq$ 右辺

（ 等号成立は，$ab = 0$ のとき．）

(2)　$|a+b| \leqq |a| + |b|$

☆単純に右辺 $-$ 左辺では加減がしにくい．

絶対値と平方も相性がいい．2 乗すると絶対値が消える．

証明

左辺，右辺ともに 0 以上の実数であるから，

$$\begin{aligned} 右辺^2 - 左辺^2 &= (|a| + |b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= \left(|a|^2 + 2|ab| + |b|^2\right) - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2\left(|ab| - ab\right) \geqq 0 \end{aligned}$$

$\therefore$　$|ab| - ab \geqq 0$ であるから，

左辺 $\leqq$ 右辺

（ 等号成立は，$ab \geqq 0$ のとき．）

2. 実数a, bに対して次の不等式を証明せよ．等号成立の条件も言え．ただし，$|A| \geqq A$ は証明せずに使っていいものとする．
（S 級 2 分，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 8 分）

(1) $\sqrt{a^2-ab+b^2} \geqq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

☆単純に右辺 − 左辺では加減がしにくい．
$\sqrt{\ }$ があるときは，平方（2 乗）を比べる．

証明
両辺ともに 0 以上の実数であるから，平方して比べる．

$$\begin{aligned}\text{左辺}^2-\text{右辺}^2 &= \left(\sqrt{a^2-ab+b^2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2\\ &= a^2-ab+b^2-\frac{a^2+b^2}{2}\\ &= \frac{2a^2-2ab+2b^2-a^2-b^2}{2}\\ &= \frac{a^2-2ab+b^2}{2}\\ &= \frac{(a-b)^2}{2} \geqq 0\end{aligned}$$

∴ 左辺 $\geqq$ 右辺
（等号成立は，$a=b$ のとき．）

☆根内の正負
$a^2-ab+b^2=\left(a-\dfrac{1}{2}b\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2>0$
であるから，特に言及する必要はない．

(2) $|a-b| \geqq |a|-|b|$

☆このままだと右辺が負になることがあるので，移項して考える．

証明 1
⇔ $|a-b|+|b| \geqq |a|$
これは左辺，右辺ともに 0 以上の実数であるから，

$$\begin{aligned}\text{左辺}^2-\text{右辺}^2 &= (|a-b|+|b|)^2-|a|^2\\ &= \left(|a-b|^2+2|a-b|\cdot|b|+|b|^2\right)-a^2\\ &= a^2-2ab+b^2+2|ab-b^2|+b^2-a^2\\ &= |2ab-2b^2|-(2ab-2b^2) \geqq 0\end{aligned}$$

∴ $|2ab-2b^2|-(2ab-2b^2) \geqq 0$ であるから，
左辺 $\geqq$ 右辺
（等号成立は，$(a-b)b \geqq 0$ のとき．）

証明 2
右辺が負のときは左辺が 0 以上であるから成立．
つまり，$|a|<|b|$ のときは成立．(等号条件なし．)

よって，右辺が 0 以上のときを証明すればよい．
右辺 $\geqq 0$ ⇔ $|a| \geqq |b|$
このとき，両辺ともに 0 以上の実数であるから，

$$\begin{aligned}\text{左辺}^2-\text{右辺}^2 &= |a-b|^2-(|a|-|b|)^2\\ &= (a-b)^2-\left(a^2-2|ab|+b^2\right)\\ &= a^2-2ab+b^2-a^2+2|ab|-b^2\\ &= 2\left(|ab|-ab\right) \geqq 0\end{aligned}$$

∴ $|ab|-ab \geqq 0$ であるから，
左辺 $\geqq$ 右辺
（等号成立は，$ab \geqq 0$ かつ $|a| \geqq |b|$ のとき．）

☆証明 1 と 2 で等号成立条件が異なるように見えるが，
ab 平面上に図示すれば同じことを言っている．

証明 3
1(2) の不等式で，a の代わりに $a-b$ を代入すれば証明可．