

反射テスト 式変形と証明 不等式の証明 01

1. 実数 x, y に対して次の不等式を証明せよ. 等号成立の条件も言え. (S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$(1) \quad 6xy \leq x^2 + 9y^2$$

$$(2) \quad 2(x + y - 1) \leq x^2 + y^2$$

$$(3) \quad x^4 + y^4 \geq xy(x^2 + y^2)$$

2. 実数 x, y に対して次の不等式を証明せよ. 等号成立の条件も言え. (S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分)

(1) $12xy \leq 4x^2 + 9y^2$

(2) $2(x + 4y) - 3 \leq x^2 + 8y^2$

(3) $x^4 + y^4 \geq 2xy(x^2 - xy + y^2)$

反射テスト 式変形と証明 不等式の証明 01 解答解説

1. 実数 x, y に対して次の不等式を証明せよ. 等号成立の条件も言え. (S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

★ 不等式の証明① $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$

$$(1) \quad 6xy \leq x^2 + 9y^2$$

$$(2) \quad 2(x + y - 1) \leq x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} - \text{左辺} &= x^2 - 6xy + 9y^2 \\ &= (x - 3y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ 左辺 $\leq$ 右辺

等号は $x - 3y = 0$ のとき成立.

$$\begin{aligned} \text{右辺} - \text{左辺} &= x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2 \\ &= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ 左辺 $\leq$ 右辺

等号は $x = y = 1$ のとき成立.

$$(3) \quad x^4 + y^4 \geq xy(x^2 + y^2)$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} - \text{右辺} &= (x^4 + y^4) - xy(x^2 + y^2) \\ &= x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 \\ &= x^3(x - y) - y^3(x - y) \\ &= (x^3 - y^3)(x - y) \\ &= (x^2 + xy + y^2)(x - y)^2 \\ &= \left\{ \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right\} (x - y)^2 \end{aligned}$$

$$\left\{ \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right\} > 0 \text{ かつ } (x - y)^2 \geq 0 \text{ より,}$$

$$\text{左辺} - \text{右辺} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{左辺} \geq \text{右辺}$$

等号は $x = y$ のとき成立.

2. 実数 x, y に対して次の不等式を証明せよ. 等号成立の条件も言え. (S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分)

$$(1) \quad 12xy \leq 4x^2 + 9y^2$$

$$(2) \quad 2(x + 4y) - 3 \leq x^2 + 8y^2$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} - \text{左辺} &= 4x^2 - 12xy + 9y^2 \\ &= (2x - 3y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ 左辺 $\leq$ 右辺

等号は $2x - 3y = 0$ のとき成立.

$$\begin{aligned} \text{右辺} - \text{左辺} &= x^2 - 2x + 8y^2 - 8y + 3 \\ &= (x - 1)^2 + 2(2y - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ 左辺 $\leq$ 右辺

等号は $x - 1 = 2y - 1 = 0$ のとき成立.

$\Leftrightarrow x = 1$ かつ $y = \frac{1}{2}$ のとき等号成立.

$$(3) \quad x^4 + y^4 \geq 2xy(x^2 - xy + y^2)$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} - \text{右辺} &= (x^4 + y^4) - 2xy(x^2 - xy + y^2) \\ &= x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 - 2xy^3 + y^4 \quad \cdots \textcircled{1} \\ &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 2xy(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2)^2 - 2xy(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= (x^2 + y^2)(x - y)^2 \end{aligned}$$

$x^2 + y^2 \geq 0$ かつ $(x - y)^2 \geq 0$ より,

左辺 - 右辺 ≥ 0

$\Leftrightarrow$ 左辺 $\geq$ 右辺

等号は $x = y = 0$ 又は $x - y = 0$ のとき成立.

$\Leftrightarrow x = y$ のとき等号成立.