反射テスト　式変形と証明　等式の証明　応用　02

1. $\begin{cases} x^3 = abc \\ x = \dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c} \end{cases}$ のとき，x が少なくとも a, b, c のいずれかに等しいことを証明せよ．

（ S 級 2 分 30 秒，A 級 3 分 50 秒，B 級 6 分，C 級 8 分 ）

2. $\begin{cases} x+y+z=a \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}$ のとき，x, y, z のうち少なくとも 1 つは a に等しいことを証明せよ．

（ S 級 3 分 30 秒，A 級 4 分 50 秒，B 級 7 分，C 級 10 分 ）

反射テスト　式変形と証明　等式の証明　応用　02　解答解説

1. $\begin{cases} x^3 = abc \\ x = \dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c} \end{cases}$ のとき，x が少なくとも a, b, c のいずれかに等しいことを証明せよ．

（S 級 2 分 30 秒，A 級 3 分 50 秒，B 級 6 分，C 級 8 分）

証明

$\begin{cases} x^3 = abc & \cdots ① \\ x = \dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c} & \cdots ② \end{cases}$ のとき，x が少なくとも a, b, c のいずれかに等しいことを証明する．

x が少なくとも a, b, c のいずれかに等しい．$\Leftrightarrow x = a$ 又は $x = b$ 又は $x = c$

$\Leftrightarrow (x-a)(x-b)(x-c) = 0 \quad \cdots ③$

この③を証明すればよい．

$$
\begin{aligned}
③\text{の左辺} &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc && \leftarrow ★ \\
&= abc - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc && (\because ①) \\
&= -(a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x \\
&= x\{-(a+b+c)x + (ab+bc+ca)\} \\
&= x\left\{-(a+b+c) \times \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} + (ab+bc+ca)\right\} && (\because ②) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

証明終了

★公式 $(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma) = t^3 - (\alpha+\beta+\gamma)t^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)t - \alpha\beta\gamma$

2. $\begin{cases} x+y+z=a \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}$ のとき，x, y, z のうち少なくとも 1 つは a に等しいことを証明せよ．

（ S 級 3 分 30 秒，A 級 4 分 50 秒，B 級 7 分，C 級 10 分 ）

証明

$\begin{cases} x+y+z=a & \cdots ① \\ x^3+y^3+z^3=a^3 & \cdots ② \end{cases}$ のとき，x, y, z のうち少なくとも 1 つは a に等しいことを証明する．

x, y, z のうち少なくとも 1 つは a に等しい．$\Leftrightarrow$ $x=a$ 又は $y=a$ 又は $z=a$

$\Leftrightarrow$ $(x-a)(y-a)(z-a)=0 \quad \cdots ③$

この③を証明すればよい．

② $\Leftrightarrow$ $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz=a^3$ ← 3 元 3 次対称式を基本対称式化していく．

$\Leftrightarrow$ $a\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}+3xyz=a^3$

$\Leftrightarrow$ $a^3-3a(xy+yz+zx)+3xyz=a^3$

$\Leftrightarrow$ $-3a(xy+yz+zx)+3xyz=0$

$\Leftrightarrow$ $xyz-a(xy+yz+zx)=0 \quad \cdots ④$

③の左辺 $= xyz-(xy+yz+zx)a+(x+y+z)a^2-a^3$ ←★

$= xyz-a(xy+yz+zx)+a^3-a^3$ （ ∵ ① ）

$=0$ （ ∵ ④ ）

証明終了

★ 1 の公式の応用 （ 1 の公式 $\times(-1)$ ）

$(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)t+(\alpha+\beta+\gamma)t^2-t^3$

☆別解 条件から文字を消去する．確実な方法．

② $\Leftrightarrow$ $x^3+y^3=a^3-z^3$

$\Leftrightarrow$ $(x+y)(x^2-xy+y^2)=(a-z)(a^2+az+z^2)$

$\Leftrightarrow$ $(a-z)(x^2-xy+y^2)=(a-z)(a^2+az+z^2) \quad \cdots ⑤$ （ ∵ ①から，$x+y=a-z$ ）

$z=a$ のとき，③は成立する．

$z \neq a$ のとき，

⑤ $\Rightarrow$ $x^2-xy+y^2=a^2+az+z^2$ （ ∵ ⑤の両辺 $\div(a-z)$ ）

$\Leftrightarrow$ $x^2-xy+y^2=a^2+a(a-x-y)+(a-x-y)^2$ （ ∵ ①から $z=a-x-y$ ）

$\Leftrightarrow$ $\cancel{x^2}-xy+\cancel{y^2}=a^2+a^2-ax-ay+a^2+\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2ax+2xy-2ay$

$\Leftrightarrow$ $-xy=3a^2-3ax-3ay+2xy$

$\Leftrightarrow$ $a^2-ax-ay+xy=0$

$\Leftrightarrow$ $(a-x)(a-y)=0$

$\Leftrightarrow$ $x=a$ 又は $y=a$

まとめると，$x=a$ 又は $y=a$ 又は $z=a$