

反射テスト 式変形と証明 等式の証明 応用 01

1. $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ が成立するとき, a, b, c のうち少なくともどれか 2 つは等しいことを証明せよ.
(S 級 2 分 30 秒, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分 40 秒, C 級 8 分)

2. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ が成立するとき, $b+c, c+a, a+b$ のうち少なくとも1つは0に等しいことを証明せよ.
(S 級 3 分 30 秒, A 級 4 分 50 秒, B 級 7 分, C 級 10 分)

反射テスト 式変形と証明 等式の証明 応用 01 解答解説

1. $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ が成立するとき, a, b, c のうち少なくともどれか 2 つは等しいことを証明せよ.
(S 級 2 分 30 秒, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分 40 秒, C 級 8 分)

証明

$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ (…①) が成立するとき, $b+c, c+a, a+b$ のうち少なくとも 1 つは 0 に等しいことを証明する.

a, b, c のうち少なくともどれか 2 つは等しい. $\Leftrightarrow a=b$ 又は $b=c$ 又は $c=a$
 $\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = 0$ …②

この②を証明すればよい.

題意から $abc \neq 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \Leftrightarrow a^2b + c^2a + b^2c &= ca^2 + ab^2 + bc^2 && \leftarrow \textcircled{1} \text{の両辺} \times abc \\ \Leftrightarrow a^2b - ca^2 - ab^2 + c^2a + b^2c - bc^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2(b-c) - a(b^2-c^2) + bc(b-c) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2(b-c) - a(b+c)(b-c) + bc(b-c) &= 0 \\ \Leftrightarrow (b-c)\{a^2 - a(b+c) + bc\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a) &= 0 && (\cdots \textcircled{2}) \end{aligned}$$

証明終了

☆解く前に②の形がイメージできるように.

2. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ が成立するとき、 $b+c, c+a, a+b$ のうち少なくとも1つは0に等しいことを証明せよ。
(S 級 3 分 30 秒, A 級 4 分 50 秒, B 級 7 分, C 級 10 分)

証明

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ (…①) が成立するとき、 $b+c, c+a, a+b$ のうち少なくとも1つは0に等しいことを証明する。

$b+c, c+a, a+b$ のうち少なくとも1つは0に等しい。 $\Leftrightarrow b+c=0$ 又は $c+a=0$ 又は $a+b=0$
 $\Leftrightarrow (b+c)(c+a)(a+b)=0$ …②

この②を証明すればよい。

題意から $abc \neq 0$ かつ $a+b+c \neq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{a+b+c} \\ &\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) = abc \quad \leftarrow \textcircled{1} \text{の両辺} \times abc(a+b+c) \\ &\Leftrightarrow a^2(b+c) + a(b^2+3bc+c^2) + bc(b+c) = abc \\ &\Leftrightarrow a^2(b+c) + a(b^2+2bc+c^2) + bc(b+c) = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2(b+c) + a(b+c)^2 + bc(b+c) = 0 \\ &\Leftrightarrow (b+c)\{a^2 + a(b+c) + bc\} = 0 \\ &\Leftrightarrow (b+c)(c+a)(a+b) = 0 \quad (\cdots \textcircled{2}) \end{aligned}$$

証明終了

☆解く前に②の形がイメージできるように。