

反射テスト 式変形と証明 等式の証明 条件付き 03

1. 次の等式を証明せよ. (S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) $a \neq -1$, $b \neq -1$, $ab = 1$ のとき, $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = 1$

(2) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$ のとき, $6x^2 + 3y^2 - 2z^2 = 1$

2. 次の等式を証明せよ. (S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) $a \neq 1, b \neq 1, ab = 1$ のとき, $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} = -ab$

(2) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$ のとき, $6x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 1$

反射テスト 式変形と証明 等式の証明 条件付き 03 解答解説

1. 次の等式を証明せよ。(S級2分, A級3分20秒, B級5分, C級7分)

★等式の証明

- ① 左辺 - 右辺 = 0 を証明する.
② 左辺 = A, 右辺 = A と式変形して証明する.

☆基本的に、展開できるものは展開してゴリゴリやればよい.

$$(1) \quad a \neq -1, b \neq -1, ab = 1 \text{ のとき, } \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = 1$$

証明

$$a \neq -1, b \neq -1, ab = 1 \text{ (} \cdots \text{①) のとき, } \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = 1 \text{ (} \cdots \text{②)}$$

$a+1 \neq 0, b+1 \neq 0$ より,

$$\begin{aligned} \text{②の (左辺 - 右辺)} &= \frac{(b+1) + (a+1)}{(a+1)(b+1)} - 1 \\ &= \frac{a+b+2 - (a+1)(b+1)}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{a+b+2 - (ab+a+b+1)}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{1-ab}{(a+1)(b+1)} = 0 \quad (\because \text{①} \Leftrightarrow 1-ab=0) \end{aligned}$$

$\therefore$ ②成立

☆通分後、分母はなるべくそのままにしておく方がよい. 約分するときの面倒な場合分けを回避するため.

☆別解

②の両辺を $(a+1)(b+1)$ 倍すると,

$$\text{②} \Leftrightarrow b+1+a+1 = (a+1)(b+1) \Leftrightarrow a+b+2 = ab+a+b+1 \Leftrightarrow 1=ab \text{ (} \cdots \text{①)}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x+y-z=0 & \cdots \text{①} \\ 2x-y+1=0 & \cdots \text{②} \end{cases} \text{ のとき, } 6x^2+3y^2-2z^2=1 \quad \cdots \text{③}$$

証明

☆①と②は変数3つ、式2つであるから、ある1つの変数で、他の2つを表すことができる.

$$\text{②} \Leftrightarrow y = 2x+1 \quad \cdots \text{④}$$

これを①に代入して,

$$x + (2x+1) - z = 0 \Leftrightarrow z = 3x+1 \quad \cdots \text{⑤}$$

④と⑤を③の左辺に代入して,

$$\begin{aligned} \text{③の左辺} &= 6x^2 + 3(2x+1)^2 - 2(3x+1)^2 \\ &= 6x^2 + 3(4x^2 + 4x + 1) - 2(9x^2 + 6x + 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ ③成立

2. 次の等式を証明せよ。(S級2分, A級3分20秒, B級5分, C級7分)

$$(1) \quad a \neq 1, b \neq 1, ab = 1 \text{ のとき, } \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} = -ab$$

証明

$$a \neq 1, b \neq 1, ab = 1 \text{ (}\cdots\text{①)} \text{ のとき, } \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} = -ab \text{ (}\cdots\text{②)}$$

$$a-1 \neq 0, b-1 \neq 0, ab=1 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \text{②の(左辺-右辺)} &= \frac{(b+1)+(a+1)}{(a-1)(b-1)} - (-ab) \\ &= \frac{a+b-2}{(a-1)(b-1)} + 1 \quad (\because \text{①}) \\ &= \frac{a+b-2+(a-1)(b-1)}{(a-1)(b-1)} \\ &= \frac{a+b-2+(ab-a-b+1)}{(a-1)(b-1)} \\ &= \frac{ab-1}{(a-1)(b-1)} = 0 \quad (\because \text{①} \Leftrightarrow 1-ab=0) \end{aligned}$$

$\therefore$ ②成立

$$(2) \quad \begin{cases} x-y+z=0 & \cdots\text{①} \\ x+y-2z=1 & \cdots\text{②} \end{cases} \text{ のとき, } 6x^2-2y^2+3z^2=1 \quad \cdots\text{③}$$

証明

☆①と②は変数3つ, 式2つであるから, ある1つの変数で, 他の2つを表すことができる.

①+②より,

$$2x-z=1 \Leftrightarrow z=2x-1 \quad \cdots\text{④}$$

これを①に代入して,

$$x-y+(2x-1)=0 \Leftrightarrow y=3x-1 \quad \cdots\text{⑤}$$

④と⑤を③の左辺に代入して,

$$\begin{aligned} \text{③の左辺} &= 6x^2 - 2(3x-1)^2 + 3(2x-1)^2 \\ &= 6x^2 - 2(9x^2 - 6x + 1) + 3(4x^2 - 4x + 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ ③成立