

反射テスト 式変形と証明 等式の証明 条件付き 02

1. $a:b=c:d$ のとき, 次の式を証明せよ. ただし分母は 0 でないとする.

(S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

$$(1) \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$(2) \quad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$$

2. $a:b=c:d$ のとき, 次の式を証明せよ. ただし分母は 0 でないとする.

(S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 5 分, C 級 8 分)

$$(1) \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$(2) \quad \left(\frac{a}{b} + \frac{d}{b}\right) \left(\frac{a}{c} + \frac{d}{c}\right) = \frac{a}{d} + \frac{d}{a} + 2$$

反射テスト 式変形と証明 等式の証明 条件付き 02 解答解説

1. $a:b=c:d$ のとき、次の式を証明せよ。ただし分母は 0 でないとする。

(S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

★等式の証明

- ① 左辺 - 右辺 = 0 を証明する。
- ② 左辺 = A, 右辺 = A と式変形して証明する。

☆基本的に、展開できるものは展開してゴリゴリやればよい。

$$(1) \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} - \text{右辺} &= \frac{d(a+b) - b(c+d)}{bc} \\ &= \frac{ad + bd - cd - bd}{bc} \\ &= 0 \end{aligned}$$

∴左辺 = 右辺

☆別解

$$\text{左辺} = \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 = \text{右辺}$$

$$(2) \quad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (ac)^2 + ad \cdot bc + bc \cdot ad + (bd)^2 \quad (\because ad = bc) \\ &= (ac)^2 + 2(ac) \cdot (bd) + (bd)^2 \\ &= (ac + bd)^2 \end{aligned}$$

∴左辺 = 右辺

☆別解 1

条件の等式から 1 つ文字を消去し、ゴリゴリ計算する。時間はかかるが確実。

☆別解 2

$$\text{左辺} - \text{右辺} = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = (ad - bc)^2 = 0$$

2. $a:b=c:d$ のとき、次の式を証明せよ。ただし分母は 0 でないとする。

(S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 5 分, C 級 8 分)

$$(1) \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} - \text{右辺} &= \frac{(a+c)(b-d) - (a-c)(b+d)}{(a-c)(b-d)} \\ &= \frac{(ab - ad + bc - cd) - (ab + ad - bc - cd)}{(a-c)(b-d)} \\ &= \frac{-2(ad - bc)}{(a-c)(b-d)} \\ &= 0 \quad (\because ad = bc) \end{aligned}$$

\therefore 左辺 = 右辺

$$(2) \quad \left(\frac{a}{b} + \frac{d}{b}\right) \left(\frac{a}{c} + \frac{d}{c}\right) = \frac{a}{d} + \frac{d}{a} + 2$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{a+d}{b} \times \frac{a+d}{c} \\ &= \frac{(a+d)^2}{bc} \\ &= \frac{a^2 + 2ad + d^2}{ad} \quad (\because ad = bc) \\ &= \frac{a}{d} + \frac{d}{a} + 2 \end{aligned}$$

\therefore 左辺 = 右辺

☆別解

$$\begin{aligned} \text{左辺} - \text{右辺} &= \frac{(a+d)^2}{bc} - \frac{a^2 + d^2 + 2ad}{ad} \\ &= \left(\frac{1}{bc} - \frac{1}{ad}\right) (a+d)^2 = 0 \end{aligned}$$