

反射テスト 式変形と証明 等式の証明 条件付き 01

1. 次の等式を証明せよ. (S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) $x + y = 0$ のとき, $x^2 - 2y^2 = xy$

(2) $a + b + c = 0$ のとき, $(b + c)(c + a)(a + b) + abc = 0$

2. 次の等式を証明せよ. (S 級 3 分, A 級 4 分 30 秒, B 級 6 分 30 秒, C 級 9 分)

(1) $x + y = 1$ のとき, $x(x - 1) = y(y - 1)$

(2) $ab + bc + ca = 0$ のとき, $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = 0$

反射テスト 式変形と証明 等式の証明 条件付き 01 解答解説

1. 次の等式を証明せよ。(S級2分, A級3分20秒, B級5分, C級7分)

★等式の証明

- ① 左辺 - 右辺 = 0 を証明する.
- ② 左辺 = A, 右辺 = A と式変形して証明する.

☆基本的に、展開できるものは展開してゴリゴリやればよい.

(1) $x + y = 0$ のとき, $x^2 - 2y^2 = xy$

$x + y = 0$ (…①) のとき, $x^2 - 2y^2 = xy$ (…②)

$$\begin{aligned}\text{②の(左辺 - 右辺)} &= x^2 - 2y^2 - xy \\ &= x^2 - xy - 2y^2 \\ &= (x + y)(x - 2y) \\ &= 0 \quad (\because \text{①})\end{aligned}$$

∴ ②成立

☆別解

① $\Leftrightarrow y = -x$

②の(左辺 - 右辺) $= x^2 - 2(-x)^2 - x \cdot (-x) = 0$

(2) $a + b + c = 0$ のとき, $(b + c)(c + a)(a + b) + abc = 0$

$a + b + c = 0$ (…①) のとき, $(b + c)(c + a)(a + b) + abc = 0$ (…②)

①から, $a + b = -c$, $b + c = -a$, $c + a = -b$ であるから,

②の左辺 $= (-c) \cdot (-a) \cdot (-b) + abc = 0$

∴ ②成立

☆別解 1

① $\Leftrightarrow c = -a - b$

これを②の左辺に代入して 0 を導く.

☆別解 2

$$\begin{aligned}\text{②の左辺} &= (b + c)a^2 + (b^2 + 3c + c^2)a + bc(b + c) \\ &= ab(a + b + c) + bc(a + b + c) + ca(a + b + c) \\ &= (a + b + c)(ab + bc + ca) = 0\end{aligned}$$

★ $(b + c)(c + a)(a + b) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$

別解 2 はこの公式を暗記していないと難しい因数分解であろう.

2. 次の等式を証明せよ。(S級3分, A級4分30秒, B級6分30秒, C級9分)

(1) $x + y = 1$ のとき, $x(x - 1) = y(y - 1)$

$x + y = 1$ (…①) のとき, $x(x - 1) = y(y - 1)$ (…②)

$$\begin{aligned}\text{②の(左辺 - 右辺)} &= x(x - 1) - y(y - 1) \\ &= x^2 - y^2 - x + y \\ &= (x + y)(x - y) - (x - y) \\ &= (x + y - 1)(x - y) \\ &= 0 \quad (\because \text{①} \Leftrightarrow x + y - 1 = 0)\end{aligned}$$

$\therefore$ ②成立

(2) $ab + bc + ca = 0$ のとき, $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = 0$

$ab + bc + ca = 0$ (…①) のとき, $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = 0$ (…②)

$a = 0$ のとき, ① $\Leftrightarrow bc = 0$ であり, ②は成立する.
同様に, $b = 0$ 又は $c = 0$ のときも②は成立.

$abc \neq 0$ のとき,

①から, $a + b = -\frac{ab}{c}$, $b + c = -\frac{bc}{a}$, $c + a = -\frac{ca}{b}$ であるから,

②の左辺 $= \left(-\frac{ab}{c}\right) \cdot \left(-\frac{bc}{a}\right) \cdot \left(-\frac{ca}{b}\right) + abc = 0$

$\therefore$ ②成立

☆別解

$$\begin{aligned}\text{②の左辺} &= (b + c)a^2 + (b^2 + 3c + c^2)a + bc(b + c) \\ &= ab(a + b + c) + bc(a + b + c) + ca(a + b + c) \\ &= (a + b + c)(ab + bc + ca) = 0\end{aligned}$$