

反射テスト 式変形と証明 等式の証明 基礎 01

1. 次の等式を証明せよ. (*S* 級 2 分, *A* 級 3 分 20 秒, *B* 級 5 分, *C* 級 7 分)

$$(1) \quad a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$(2) \quad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$(3) \quad \frac{a^2 + 1}{a} + \frac{b^2 + 1}{b} + \frac{c^2 + 1}{c} = a + b + c + \frac{ab + bc + ca}{abc}$$

2. 次の等式を証明せよ. (*S* 級 2 分, *A* 級 3 分 20 秒, *B* 級 5 分, *C* 級 7 分)

$$(1) \quad a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) = \frac{1}{2}\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$$

$$(3) \quad \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = \frac{1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc}{abc}$$

反射テスト 式変形と証明 等式の証明 基礎 01 解答解説

1. 次の等式を証明せよ。(S級2分, A級3分20秒, B級5分, C級7分)

★等式の証明

- ① 左辺 - 右辺 = 0 を証明する.
- ② 左辺 = A, 右辺 = A と式変形して証明する.

☆基本的に、展開できるものは展開してゴリゴリやればよい.

$$(1) \quad a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{左辺} = \text{右辺}$$

$$(2) \quad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ \text{右辺} &= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{左辺} = \text{右辺}$$

☆別解

$$\text{左辺} - \text{右辺} = 2abcd - 2abcd = 0$$

$$(3) \quad \frac{a^2+1}{a} + \frac{b^2+1}{b} + \frac{c^2+1}{c} = a + b + c + \frac{ab+bc+ca}{abc}$$

$$\text{左辺} = a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + c$$

$$\text{右辺} = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\therefore \text{左辺} = \text{右辺}$$

2. 次の等式を証明せよ。(S級2分, A級3分20秒, B級5分, C級7分)

$$(1) \quad a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= a^3 + b^3 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{左辺} = \text{右辺}$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) = \frac{1}{2}\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \\ \text{右辺} &= \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2) \\ &= \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \end{aligned}$$

$$\therefore \text{左辺} = \text{右辺}$$

$$(3) \quad \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = \frac{1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc}{abc}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{abc} \\ \text{右辺} &= \frac{1}{abc} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{左辺} = \text{右辺}$$