

反射テスト 式変形と証明 方程式と論理 01

1. 次の条件を1つの方程式で表せ. (S 級 50 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

(1) 実数 a, b, c のうち少なくとも1つは0である.

(2) 実数 a, b, c に対して

$$a + b + c = 0 \text{ かつ } ab + bc + ca = 0$$

(3) 実数 a, b, c に対して $a = b = c$

(4) 実数 a, b, c に対して

$$a + b = 0 \text{ 又は } b + c = 0 \text{ 又は } c + a = 0$$

(5) 実数 x, y, z のうち少なくとも1つは a に等しい.

(6) 実数 a, b, c のいずれも0ではない.

2. 次の条件を1つの方程式で表せ。(S級1分, A級1分40秒, B級2分, C級3分)

(1) 実数 a, b, c 全て0である.

(2) 実数 a, b, c に対して

$a + b + c$, $ab + bc + ca$ のどちらかは0である.

(3) 実数 a, b, c に対して

$a = 1$ かつ $b = 2$ かつ $c = 3$

(4) 実数 a, b, c に対して

a, b, c のいずれか2つは等しい.

(5) 実数 x は a, b, c のいずれかに等しい.

(6) 実数 x, y, z のいずれも a ではない.

反射テスト 式変形と証明 方程式と論理 01 解答解説

1. 次の条件を1つの方程式で表せ。(S級50秒, A級1分30秒, B級2分, C級3分)

実数 A, B, C に対して,

$$\star A = 0 \text{ 又は } B = 0 \text{ 又は } C = 0 \Leftrightarrow ABC = 0$$

$$\star A = 0 \text{ かつ } B = 0 \text{ かつ } C = 0 \Leftrightarrow A^2 + B^2 + C^2 = 0 \quad (|A| + |B| + |C| = 0 \text{ でもよい.})$$

(1) 実数 a, b, c のうち少なくとも1つは0である.

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ 又は } b = 0 \text{ 又は } c = 0$$

$$\Leftrightarrow abc = 0$$

(2) 実数 a, b, c に対して

$$a + b + c = 0 \text{ かつ } ab + bc + ca = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 + (ab + bc + ca)^2 = 0$$

$$\star \text{別解 1 } |a + b + c| + |ab + bc + ca| = 0$$

☆別解 2

$c = -(a + b)$ として, もう1つの式に代入すれば,

$$ab + (a + b) \times \{-(a + b)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow ab = (a + b)^2$$

(3) 実数 a, b, c に対して $a = b = c$

$$\Leftrightarrow a = b \text{ かつ } b = c \text{ かつ } c = a$$

$$\Leftrightarrow a - b = 0 \text{ かつ } b - c = 0 \text{ かつ } c - a = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\star \text{別解 1 } (a - b)^2 + (b - c)^2 = 0$$

$$\star \text{別解 2 } |a - b| + |b - c| + |c - a| = 0$$

$$\star \text{別解 3 } |a - b| + |b - c| = 0$$

他にもいくつもある.

(4) 実数 a, b, c に対して

$$a + b = 0 \text{ 又は } b + c = 0 \text{ 又は } c + a = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0$$

(5) 実数 x, y, z のうち少なくとも1つは a に等しい.

$$\Leftrightarrow x = a \text{ 又は } y = a \text{ 又は } z = a$$

$$\Leftrightarrow x - a = 0 \text{ 又は } y - a = 0 \text{ 又は } z - a = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(y - a)(z - a) = 0$$

(6) 実数 a, b, c のいずれも0ではない.

$$\Leftrightarrow a \neq 0 \text{ かつ } b \neq 0 \text{ かつ } c \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 「a = 0 \text{ 又は } b = 0 \text{ 又は } c = 0」 \text{ ではない.}$$

$$(\because \text{ド・モルガンの法則})$$

$$\Leftrightarrow abc \neq 0$$

2. 次の条件を1つの方程式で表せ。(S級1分, A級1分40秒, B級2分, C級3分)

(1) 実数 a, b, c 全て0である.

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ かつ } b = 0 \text{ かつ } c = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

(2) 実数 a, b, c に対して

$a + b + c$, $ab + bc + ca$ のどちらかは0である.

$$\Leftrightarrow (a + b + c)(ab + bc + ca) = 0$$

(3) 実数 a, b, c に対して

$a = 1$ かつ $b = 2$ かつ $c = 3$

$$\Leftrightarrow a - 1 = 0 \text{ かつ } b - 2 = 0 \text{ かつ } c - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 2)^2 + (c - 3)^2 = 0$$

☆別解 $|a - 1| + |b - 2| + |c - 3| = 0$

他にもいくつもある.

(4) 実数 a, b, c に対して

a, b, c のいずれか2つは等しい.

$$\Leftrightarrow a = b \text{ 又は } b = c \text{ 又は } c = a$$

$$\Leftrightarrow a - b = 0 \text{ 又は } b - c = 0 \text{ 又は } c - a = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(b - c)(c - a) = 0$$

(5) 実数 x は a, b, c のいずれかに等しい.

$$\Leftrightarrow x = a \text{ 又は } x = b \text{ 又は } x = c$$

$$\Leftrightarrow x - a = 0 \text{ 又は } x - b = 0 \text{ 又は } x - c = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(x - b)(x - c) = 0$$

(6) 実数 x, y, z のいずれも a ではない.

$$\Leftrightarrow x \neq a \text{ かつ } y \neq a \text{ かつ } z \neq a$$

$$\Leftrightarrow \text{「} x = a \text{ 又は } y = a \text{ 又は } z = a \text{」 ではない.}$$

($\because$ ド・モルガンの法則)

$$\Leftrightarrow (x - a)(y - a)(z - a) \neq 0$$