反射テスト　式変形と証明　全称記号・存在記号　01

1.　次の問に答えよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1)　$x+y=1$ を満たすどのような実数 x, y に対しても, $ax+by=2$ が常に成り立つような実数 a, b の値を定めよ.

(2)　$(a^2-a-2)b+a^2-1=0$ を満たす実数 a がただ 1 つしかないような実数 b の値を求めよ.

2.　次の問に答えよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1)　$x-y-2=0$ を満たすどのような実数 x, y に対しても, $ax+by=2$ が常に成り立つような実数 a, b の値を定めよ.

(2)　$(3-2a-a^2)b+a^2-1=0$ を満たす実数 a がただ 1 つしかないような実数 b の値を求めよ.

反射テスト　式変形と証明　全称記号・存在記号　01　解答解説

1.　次の問に答えよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

★ 全称記号∀と存在記号∃

あらゆる x に対して $f(x)=0$　⇔　∀ x に対して $f(x)=0$　←★ **恒等式**

$f(x)=0$ を満たす x が存在する.　⇔　∃ x に対して $f(x)=0$　←★ **方程式**

☆方程式を解いて x はあらゆる数になるときがある. その場合は恒等式とも言える. 恒等式は方程式を包含すると言える.

(1)　$x+y=1$　…①

を満たすどのような実数 x, y に対しても,

$ax+by=2$　…②

が常に成り立つような実数 a, b の値を定めよ.

① ⇔ $y=1-x$

これを②に代入すると,　$ax+b(1-x)=2 \Leftrightarrow (a-b)x+(b-2)=0$

これを x についての恒等式と考えて（☆恒等式 = どんな x についても成り立つ式）

$a-b=0$ かつ $b-2=0$

⇔　$\boldsymbol{(a, b)=(2, 2)}$

☆別解 1　代入しやすい 0 を用いる. (この方法は a, b の値を求めるのは早いが, 論証としては不十分.)

①を満たす $(0, 1)$ を②に代入して,　$b\cdot 1=2$　⇒　$b=2$

①を満たす $(1, 0)$ を②に代入して,　$a\cdot 1=2$　⇒　$a=2$

よって, $(a, b)=(2, 2)$

☆別解 2　x, y についての恒等式は, 座標平面上で一致することを用いる. (格段に早いが, 常に使える方法ではない.)

①の両辺を 2 倍して,　$2x+2y=2$

②　⇔　$ax+by=2$

この 2 つを比べて　$(a, b)=(2, 2)$

(2)　$(a^2-a-2)b+a^2-1=0$　…①

を満たす実数 a がただ 1 つしかないような実数 b の値を求めよ.

☆ある意味 a が主人公であるから, a について整理し, a についての 2 次方程式を考える.

①　⇔　$(b+1)a^2-ba-2b-1=0$

$b=-1$ のとき, ①は 1 次方程式となって,　①　⇔　$a+1=0$　⇔　$a=-1$

実数 a は 1 つしかないので, $b=-1$ のときは適当である.

$b\neq -1$ のとき, ①は 2 次方程式であるから, 重解をとればよい.

①の判別式は,　$(-b)^2-4(b+1)(-2b-1)=b^2+4(b+1)(2b+1)=9b^2+12b+4$

$\therefore$　$9b^2+12b+4=0$　⇔　$(3b+2)^2=0$　⇔　$b=-\dfrac{2}{3}$

以上の結果から, $\boldsymbol{b=-1}$ **,** $\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}}$

2. 次の問に答えよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1) $x-y-2=0 \quad \cdots$①
を満たすどのような実数 x, y に対しても,
$ax+by=2 \quad \cdots$②
が常に成り立つような実数 a, b の値を定めよ.

① $\Leftrightarrow y=x-2$
これを②に代入すると, $ax+b(x-2)=2 \Leftrightarrow (a+b)x+(-2b-2)=0$
これを x についての恒等式と考えて（☆恒等式 = どんな x についても成り立つ式）
$a+b=0$ かつ $-2b-2=0$
$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{(a, b)=(1,-1)}$

☆別解 1　代入しやすい 0 を用いる. (この方法は a, b の値を求めるのは早いが, 論証としては不十分.)

①を満たす $(0,-2)$ を②に代入して, $b\cdot(-2)=2 \quad \Rightarrow \quad b=-1$
①を満たす $(2,0)$ を②に代入して, $a\cdot 2=2 \quad \Rightarrow \quad a=1$
よって, $(a, b)=(1,-1)$

☆別解 2　x, y についての恒等式は, 座標平面上で一致することを用いる. (格段に早いが, 常に使える方法ではない.)
①を変形して, $x-y=2$
② $\Leftrightarrow$ $ax+by=2$
この 2 つを比べて $(a, b)=(1,-1)$

(2) $(3-2a-a^2)b+a^2-1=0 \quad \cdots$①
を満たす実数 a がただ 1 つしかないような実数 b の値を求めよ.

☆ある意味 a が主人公であるから, a について整理し, a についての 2 次方程式を考える.
① $\Leftrightarrow$ $(1-b)a^2-2ba+3b-1=0$

$b=1$ のとき, ①は 1 次方程式となって, ① $\Leftrightarrow$ $-2a+2=0$ $\Leftrightarrow$ $a=1$
実数 a は 1 つしかないので, $b=1$ のときは適当である.

$b \neq 1$ のとき, ①は 2 次方程式であるから, 重解をとればよい.
①の判別式/4 は, $(-b)^2-(1-b)(3b-1)=b^2-(3b-1-3b^2+b)=4b^2-4b+1$
$\therefore$ $4b^2-4b-1=0$ $\Leftrightarrow$ $(2b-1)^2=0$ $\Leftrightarrow$ $b=\dfrac{1}{2}$

以上の結果から, $\boldsymbol{b=\dfrac{1}{2}, 1}$