反射テスト　式変形と証明　恒等式の応用　01

1.　次の問に答えよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分 40 秒, C 級 8 分 ）

(1)　$x+y=1$ を満たすどのような x, y に対しても常に $ax+by=2$ が成り立つように, a, b の値を定めよ.

(2)　2 つの等式 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=1 \end{cases}$ を同時に満たす任意の実数 x, y, z に対して等式 $ax^2+by^2+cz^2=1$ が成り立つとき, a, b, c の値を求めよ.

2. 次の問に答えよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分 40 秒, C 級 8 分 ）

(1) $3x+y=1$ を満たすどのような x, y に対しても常に $ax+by-3=0$ が成り立つように, a, b の値を定めよ.

(2) 2 つの等式 $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ を同時に満たす任意の実数 x, y, z に対して等式 $ax^2+by^2+cz^2=1$ が成り立つとき, a, b, c の値を求めよ.

反射テスト　式変形と証明　恒等式の応用　01　解答解説

1.　次の問に答えよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分 40 秒, C 級 8 分 ）

(1)　$x+y=1$　…①
満たすどのような x, y に対しても常に
$ax+by=2$　…②
が成り立つように, a, b の値を定めよ.

① $\Leftrightarrow$ $y=1-x$
これを②に代入すると,　$ax+b(1-x)=2 \Leftrightarrow (a-b)x+(b-2)=0$
これを x についての恒等式と考えて（☆恒等式 $=$ どんな x についても成り立つ式）
$a-b=0$ かつ $b-2=0$
$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{(a, b)=(2, 2)}$

☆別解 1　代入しやすい 0 を用いる.

①を満たす $(0, 1)$ を②に代入して, $b \cdot 1=2 \quad \Rightarrow \quad b=2$
①を満たす $(1, 0)$ を②に代入して, $a \cdot 1=2 \quad \Rightarrow \quad a=2$
よって, $(a, b)=(2, 2)$

☆別解 2　x, y についての恒等式は, 座標平面上で一致することを用いる.
①の両辺を 2 倍して,　$2x+2y=2$
②　$\Leftrightarrow$　$ax+by=2$
この 2 つを比べて　$(a, b)=(2, 2)$

(2)　2 つの等式 $\begin{cases} x+y+z=0 & \cdots ① \\ x-y=1 & \cdots ② \end{cases}$
を同時に満たす任意の実数 x, y, z に対して
等式 $ax^2+by^2+cz^2=1$　…③
が成り立つとき, a, b, c の値を求めよ.

②　$\Leftrightarrow$　$y=x-1$　…④
①に代入して, $x+(x-1)+z=0$　$\Leftrightarrow$　$z=1-2x$　…⑤

④と⑤を③に代入して,
$ax^2+b(x-1)^2+c(1-2x)^2=1$
$\Leftrightarrow$　$(a+b+4c)x^2+(-2b-4c)x+b+c-1=0$

これが任意の実数 x について成立するから（☆恒等式）,
$\Leftrightarrow$　$a+b+4c=0$ かつ $-2b-4c=0$ かつ $b+c-1=0$
$\Leftrightarrow$　$a=2$ かつ $b=2$ かつ $c=-1$
$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{(a, b, c)=(2, 2, -1)}$

2. 次の問に答えよ.（S 級 2 分, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分 40 秒, C 級 8 分）

(1) $3x+y=1 \quad \cdots①$
を満たすどのような x, y に対しても常に
$ax+by-3=0 \quad \cdots②$
が成り立つように a, b の値を定めよ.

① $\Leftrightarrow$ $y=1-3x$
これを②に代入すると, $ax+b(1-3x)-3=0 \Leftrightarrow (a-3b)x+(b-3)=0$
これを x についての恒等式と考えて（☆恒等式 = どんな x についても成り立つ式）
$a-3b=0$ かつ $b-3=0$
$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{(a, b)=(9, 3)}$

☆別解 1 代入しやすい 0 を用いる.

①を満たす $(0, 1)$ を②に代入して, $b \cdot 1-3=0 \quad \Rightarrow \quad b=3$
①を満たす $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ を②に代入して, $a \cdot \frac{1}{3}-3=0 \quad \Rightarrow \quad a=9$
よって, $(a, b)=(9, 3)$

☆別解 2 x, y についての恒等式は, 座標平面上で一致することを用いる.
①の両辺を 3 倍して, $9x+3y=3$
② $\Leftrightarrow$ $ax+by=3$
この 2 つを比べて $(a, b)=(9, 3)$

(2) 2 つの等式 $\begin{cases} x+y-z=0 & \cdots① \\ 2x-y+1=0 & \cdots② \end{cases}$
を同時に満たす任意の実数 x, y, z に対して
等式 $ax^2+by^2+cz^2=1 \quad \cdots③$
が成り立つとき, a, b, c の値を求めよ.

② $\Leftrightarrow$ $y=2x+1 \quad \cdots④$
①に代入して, $x+(2x+1)-z=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=3x+1 \quad \cdots⑤$

④と⑤を③に代入して,
$ax^2+b(2x+1)^2+c(3x+1)^2=1$
$\Leftrightarrow$ $(a+4b+9c)x^2+(4b+6c)x+b+c-1=0$

これが任意の実数 x について成立するから（☆恒等式）,
$\Leftrightarrow$ $a+4b+9c=0$ かつ $4b+6c=0$ かつ $b+c-1=0$
$\Leftrightarrow$ $a=6$ かつ $b=3$ かつ $c=-2$
$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{(a, b, c)=(6, 3, -2)}$