反射テスト 式変形と証明 恒等式 03

1. x について恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 10 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 30 秒)

$$(1) \quad \frac{3x-1}{(x+3)(x-2)} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2}$$

$$(2) \quad \frac{2x-6}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

2. x について恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ. (S 級 2 分 40 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 4 分 40 秒, C 級 6 分)

$$(1) \quad \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$$

$$(2) \quad \frac{4x - 5}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2} + \frac{c}{x - 3}$$

反射テスト 式変形と証明 恒等式 03 解答解説

1. x について恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 10 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 30 秒)

★ 恒等式と方程式

$$\begin{cases} x \text{ についての恒等式} & \text{あらゆる } x \text{ について成り立つ式} \\ x \text{ についての方程式} & \text{ある } x \text{ について成り立つ式} \end{cases}$$

☆この2つの違いをしっかりと把握して答案を書くことができるように. 高校数学の最重要テーマである. この2つの違いを明確にできない答案は見にくく, 数学を知らないと思われる.

$$(1) \quad \frac{3x-1}{(x+3)(x-2)} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{(x+3)(x-2)} = \frac{a(x-2)+b(x+3)}{(x+3)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{(x+3)(x-2)} = \frac{(a+b)x-2a+3b}{(x+3)(x-2)}$$

$$\text{恒等式であるから, } a+b=3 \text{ かつ } -2a+3b=-1 \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) = (2, 1)$$

$$(2) \quad \frac{2x-6}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-6}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a(x+1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-6}{x(x+1)(x+2)} = \frac{(a+b+c)x^2+(3a+2b+c)x+2a}{x(x+1)(x+2)}$$

恒等式であるから,

$$a+b+c=0 \text{ かつ } 3a+2b+c=2 \text{ かつ } 2a=-6$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = (-3, 8, -5)$$

2. x について恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ. (S 級 2 分 40 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 4 分 40 秒, C 級 6 分)

$$(1) \quad \frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a(x^2+x+1) + (x-1)(bx+c)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + a-c}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

恒等式であるから,

$$a+b=0 \text{ かつ } a-b+c=0 \text{ かつ } a-c=1$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

$$(2) \quad \frac{4x-5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{(a+b+c)x^2 + (-5a-4b-3c)x + 6a+3b+2c}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

恒等式であるから,

$$a+b+c=0 \text{ かつ } -5a-4b-3c=4 \text{ かつ } 6a+3b+2c=-5$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = \left(-\frac{1}{2}, -3, \frac{7}{2} \right)$$