反射テスト　式変形と証明　恒等式　02

1.　次の各式が x について恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ.（ S 級 1 分 50 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 20 秒 ）

(1)　$x^3-3x+1=(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$　　(2)　$2x^2-3x-7=ax(x+1)+b(x+1)(x-1)+cx(x-1)$

2. 次の各式がxについて恒等式となるように定数a, b, cの値を定めよ.（ S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 4 分, C 級 6 秒 ）

(1) $x^3+3x^2-5=(x+3)^3+a(x+3)^2+b(x+3)+c$ (2) $5x^2+x-6=ax(x-1)+b(x-1)(x-2)+cx(x-2)$

反射テスト　式変形と証明　恒等式　02　解答解説

1.　次の各式が x について恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ．(S 級 1 分 50 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 20 秒)

★ 恒等式と方程式

$$\begin{cases} \text{x についての恒等式　あらゆる x について成り立つ式} \\ \text{x についての方程式　ある x について成り立つ式} \end{cases}$$

☆この 2 つの違いをしっかり把握して答案を書くことができるように. 高校数学の最重要テーマである. この 2 つの違いを明確にできない答案は見にくく, 数学を知らないと思われる.

(1)　$x^3 - 3x + 1 = (x-2)^3 + a(x-2)^2 + b(x-2) + c$

両辺に $x = 2$ を代入　$\Rightarrow$　$3 = c$

$\therefore$　$x^3 - 3x + 1 = (x-2)^3 + a(x-2)^2 + b(x-2) + 3$
$\Leftrightarrow$　$x^3 - 3x - 2 = (x-2)^3 + a(x-2)^2 + b(x-2)$
$\Leftrightarrow$　$(x+1)^2(x-2) = (x-2)^3 + a(x-2)^2 + b(x-2)$
x があらゆる実数で成立するので,
$x \neq 2$ のときも成立する.
両辺を $x-2$ で割って,
$\Rightarrow$　$(x+1)^2 = (x-2)^2 + a(x-2) + b$　$\cdots$①

$x = 3$ を代入して,　$16 = 1 + a + b$
$x = 1$ を代入して,　$4 = 1 - a + b$

解いて,　$a = 6$,　$b = 9$

$\therefore$　$\boldsymbol{(a, b, c) = (6, 9, 3)}$

☆別解
右辺を展開して, ゴリゴリ解くのもあり.
右辺を展開して, x の係数比較をすれば,
$0 = -6 + a$ かつ $-3 = 12 - 4a + b$ かつ $1 = -8 + 4a - 2b + c$
$\Leftrightarrow$　$(a, b, c) = (6, 9, 3)$

(2)　$2x^2 - 3x - 7 = ax(x+1) + b(x+1)(x-1) + cx(x-1)$

☆恒等式であるから, あらゆる x について成立する.
ということは, **ある特定の x についても成立する.**
$x = 0$ を代入　$\Rightarrow$　$-7 = -b$　$\Rightarrow$　$b = 7$
$x = 1$ を代入　$\Rightarrow$　$-8 = 2a$　$\Rightarrow$　$a = -4$
$x = -1$ を代入　$\Rightarrow$　$-2 = 2c$　$\Rightarrow$　$c = -1$

$\therefore$　$\boldsymbol{(a, b, c) = (-4, 7, -1)}$

☆常に工夫を考える
「早くする方法はないか」,「もっといい方法はないか」. 常にそういったことを貪欲に考えることが, 数学力（数覚）を鍛える最良のトレーニングになる. 数学は幾人もの先人たちがそうやって発展させていった.

2. 次の各式がxについて恒等式となるように定数a,b,cの値を定めよ.（S級2分10秒, A級3分, B級4分, C級6秒）

(1) $x^3+3x^2-5=(x+3)^3+a(x+3)^2+b(x+3)+c$

(2) $5x^2+x-6=ax(x-1)+b(x-1)(x-2)+cx(x-2)$

両辺に $x=-3$ を代入 $\Rightarrow$ $-5=c$

$\therefore$ $x^3+3x^2-5=(x+3)^3+a(x+3)^2+b(x+3)-5$
$\Leftrightarrow$ $x^3+3x^2=(x+3)^3+a(x+3)^2+b(x+3)$
$\Leftrightarrow$ $x^2(x+3)=(x+3)^3+a(x+3)^2+b(x+3)$
xがあらゆる実数で成立するので,
$x\neq-3$ のときも成立する.
両辺を $x+3$ で割って,
$\Rightarrow$ $x^2=(x+3)^2+a(x+3)+b$

$x=-2$ を代入して, $4=1+a+b$
$x=-4$ を代入して, $16=1-a+b$

解いて, $a=-6$, $b=9$

$\therefore$ $\boldsymbol{(a,b,c)=(-6,9,-5)}$

☆恒等式であるから, あらゆるxについて成立する.
ということは, **ある特定のxについても成立する.**
$x=0$ を代入 $\Rightarrow$ $-6=2b$ $\Rightarrow$ $b=-3$
$x=1$ を代入 $\Rightarrow$ $0=-c$ $\Rightarrow$ $c=0$
$x=2$ を代入 $\Rightarrow$ $16=2a$ $\Rightarrow$ $a=8$

$\therefore$ $\boldsymbol{(a,b,c)=(8,-3,0)}$