

反射テスト 式変形と証明 恒等式 01

1. 次の各式が x について恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ。(S 級 50 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

$$(1) \quad (x + a)(x + 3) = x^2 + 2x + b$$

$$(2) \quad ax^2 - 12x + b = (2x - c)^2$$

$$(3) \quad (ax^2 + bx + c)(x + 1) = x^3 - 3x - 2$$

2. 次の各式が x について恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ。(S級50秒, A級1分20秒, B級2分, C級3分)

(1) $(x - a)(x + 2) = x^2 + bx + 8$

(2) $ax^2 - 24x + b = (3x - c)^2$

(3) $(ax^2 + bx + c)(x - 2) = 2x^3 - 5x - 6$

反射テスト 式変形と証明 恒等式 01 解答解説

1. 次の各式が x について恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ。(S 級 50 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

★ 恒等式と方程式

$$\begin{cases} x \text{ についての恒等式} & \text{あらゆる } x \text{ について成り立つ式} \\ x \text{ についての方程式} & \text{ある } x \text{ について成り立つ式} \end{cases}$$

☆この2つの違いをしっかりと把握して答案を書くことができるように、高校数学の最重要テーマである。この2つの違いを明確にできない答案は見にくく、数学を知らないと思われる。

$$(1) \quad (x+a)(x+3) = x^2 + 2x + b$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (a+3)x + 3a = x^2 + 2x + b$$

これがあらゆる実数 x について成立するから、

$$a+3=2 \text{ かつ } 3a=b$$

$$\Leftrightarrow a=-1 \text{ かつ } b=-3$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (-1, -3)$$

$$(2) \quad ax^2 - 12x + b = (2x - c)^2$$

$$\Leftrightarrow ax^2 - 12x + b = 4x^2 - 4cx + c^2$$

これがあらゆる実数 x について成立するから、

$$a=4 \text{ かつ } -12=-4c \text{ かつ } b=c^2$$

$$\Leftrightarrow a=4 \text{ かつ } c=3 \text{ かつ } b=9$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = (4, 9, 3)$$

$$(3) \quad (ax^2 + bx + c)(x+1) = x^3 - 3x - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{右辺} = (x+1)(x^2 - x - 2)$$

①は x があらゆる実数で成立するから、

$x \neq -1$ のとき、両辺を $(x+1)$ で割って、

$$ax^2 + bx + c = x^2 - x - 2$$

$$\Leftrightarrow a=1 \text{ かつ } b=-1 \text{ かつ } c=-2$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = (1, -1, -2)$$

☆別解 ゴリゴリ解くと以下のようなになる。

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c = x^3 - 3x - 2$$

これがあらゆる実数 x について成立するから、

$$a=1 \text{ かつ } a+b=0 \text{ かつ } b+c=-3 \text{ かつ } c=-2$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = (1, -1, -2)$$

2. 次の各式が x について恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ。(S級50秒, A級1分20秒, B級2分, C級3分)

$$(1) \quad (x-a)(x+2) = x^2 + bx + 8$$

$$(2) \quad ax^2 - 24x + b = (3x - c)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2-a)x - 2a = x^2 + bx + 8$$

$$\Leftrightarrow ax^2 - 24x + b = 9x^2 - 6cx + c^2$$

これがあらゆる実数 x について成立するから,

$$2 - a = b \text{ かつ } -2a = 8$$

$$\Leftrightarrow a = -4 \text{ かつ } b = 6$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (-4, 6)$$

これがあらゆる実数 x について成立するから,

$$a = 9 \text{ かつ } -24 = -6c \text{ かつ } b = c^2$$

$$\Leftrightarrow a = 9 \text{ かつ } c = 4 \text{ かつ } b = 16$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = (9, 16, 4)$$

$$(3) \quad (ax^2 + bx + c)(x - 2) = 2x^3 - 5x - 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{右辺} = (x - 2)(2x^2 + 4x + 3)$$

①があらゆる実数 x について成立するから,

$x \neq 2$ のとき, 両辺を $(x - 2)$ で割って,

$$ax^2 + bx + c = 2x^2 + 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \text{ かつ } b = 4 \text{ かつ } c = 3$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = (2, 4, 3)$$