反射テスト 式変形と証明 恒等式・方程式の判定 01

1. 次の式が何についての恒等式か, 又は何についての方程式か判定せよ.

(S 級 30 秒, A 級 45 秒, B 級 1 分, C 級 1 分 20 秒)

(1) $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(2) $(x + 1)^2 = (x - 1)^2$

(3) $(x + 1)^2 = x^2 + ax + 1$

2. 次の式が何についての恒等式か, 又は何についての方程式か判定せよ.

(S 級 35 秒, A 級 50 秒, B 級 1 分 10 秒, C 級 1 分 30 秒)

(1) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

(2) $(p + q)^2 = (p - q)^2$

(3) $|x + y| + |x - y| = 0$

反射テスト 式変形と証明 恒等式・方程式の判定 01 解答解説

1. 次の式が何についての恒等式か、又は何についての方程式か判定せよ。

(S級 30秒, A級 45秒, B級 1分, C級 1分20秒)

★ 恒等式と方程式

$$\begin{cases} x \text{ についての恒等式} & \text{あらゆる } x \text{ について成り立つ式} \\ x \text{ についての方程式} & \text{ある } x \text{ について成り立つ式} \end{cases}$$

☆この2つの違いをしっかりと把握して答案を書くことができるように、高校数学の最重要テーマである。この2つの違いを明確にできない答案は見にくく、数学を知らないと思われる。

☆実は、厳密な意味で、完璧な分類はできない。1(1)のように難癖をつけることが可能である。以下の解答は考えられるものなるべくあげた。神経質になる必要はない。式の意味を考える機会になれば幸いである。

☆悪い例

連立方程式 $\begin{cases} y = x + 1 & \dots \textcircled{1} \\ 3x - y = x + 5 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$ を解くときに、次のような式変形は悪い例である。

②の右辺に①を代入する式変形として

$$\begin{aligned} 3x - y &= 3x - (x + 1) = x + 5 \dots \textcircled{3} \\ 2x - 1 &= x + 5 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

ここで③は恒等式なのか方程式なのかわかりにくい。答えがあってもこういう答案を書かないように。

(1) $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(2) $(x + 1)^2 = (x - 1)^2$

左辺を展開すると右辺になる。
計算式は恒等式であるから、
 x についての恒等式。

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &= x^2 - 2x + 1 \\ \Leftrightarrow 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

極端な解答例 (以下に留意できれば間違えではない)
 x についての方程式。

x についての方程式 である。

☆解は「 x はあらゆる数」と考えれば方程式とも言える。

(3) $(x + 1)^2 = x^2 + ax + 1$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &= x^2 + ax + 1 \\ \Leftrightarrow 2x &= ax \dots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow x(a - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 &\text{ 又は } a = 2 \end{aligned}$$

a, x についての方程式 である。

又は、次の表現も妥当である。

$$\begin{cases} a = 2 \text{ のとき, } x \text{ についての恒等式.} \\ a \neq 2 \text{ のとき, } x \text{ についての方程式 (解は } x = 0 \text{).} \\ x = 0 \text{ のとき, } a \text{ についての恒等式.} \\ x \neq 0 \text{ のとき, } a \text{ についての方程式 (解は } a = 2 \text{).} \end{cases}$$

2. 次の式が何についての恒等式か, 又は何についての方程式か判定せよ.

(S 級 35 秒, A 級 50 秒, B 級 1 分 10 秒, C 級 1 分 30 秒)

(1) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

左辺を因数分解すると右辺になる.
計算式は恒等式であるから,
 a, b についての恒等式 である.

(2) $(p + q)^2 = (p - q)^2$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow p^2 + 2pq + q^2 &= p^2 - 2pq + q^2 \\ \Leftrightarrow 4pq &= 0 \\ \Leftrightarrow pq &= 0 \\ \Leftrightarrow p = 0 \text{ 又は } q = 0 \end{aligned}$$

p, q についての方程式 である.

又は, 次の表現も妥当である.

$$\begin{cases} p = 0 \text{ のとき, } q \text{ についての恒等式.} \\ p \neq 0 \text{ のとき, } q \text{ についての方程式 (解は } q = 0 \text{).} \end{cases}$$
$$\begin{cases} q = 0 \text{ のとき, } p \text{ についての恒等式.} \\ q \neq 0 \text{ のとき, } p \text{ についての方程式 (解は } p = 0 \text{).} \end{cases}$$

(3) $|x + y| + |x - y| = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x + y = 0 \text{ かつ } x - y = 0 \\ \Leftrightarrow x = y = 0 \end{aligned}$$

x, y についての方程式 である.

又は, 次の表現も妥当である.

x についての方程式 である.

y についての方程式 である.