

## 反射テスト 積分 積分方程式 応用 01

1. 次の式があらゆる  $x$  について成立するとき  $f(x)$  と 定数  $C$  を求めよ. (  $S$  級 3 分,  $A$  級 4 分 20 秒,  $B$  級 6 分,  $C$  級 9 分 )

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^1 x^2 f(t) dt = 3x^2 + C$$

2. 次の式があらゆる  $x$  について成立するとき  $f(x)$  と定数  $a$  を求めよ. (  $S$  級 4 分,  $A$  級 5 分 30 秒,  $B$  級 8 分,  $C$  級 12 分 )

$$\int_a^x f(t) dt = x^3 + 4 + \int_0^2 (x+t) f(t) dt$$

## 反射テスト 積分 積分方程式 応用 01 解答解説

1. 次の式があらゆる  $x$  について成立するとき  $f(x)$  と定数  $C$  を求めよ. (  $S$  級 3 分,  $A$  級 4 分 20 秒,  $B$  級 6 分,  $C$  級 9 分 )

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^1 x^2 f(t) dt = 3x^2 + C$$

### ★ 積分方程式

未知の関数が積分の中に現れる方程式のこと. 区間が変数ではない積分方程式もあるが, ここでは以下の問のように区間に変数がある形を練習する. これらはヴォルテラ積分方程式と呼ばれる.

### ★ $\int_a^x f(t) dt = g(x)$ の解き方

- ①  $x = a$  を代入する.  $a$  から  $a$  までの定積分は 0 なので左辺は 0. ゆえに  $g(a) = 0$ .
- ② 両辺を  $x$  について微分する. 左辺  $= \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$  なので,  $f(x) = g'(x)$ .
- ③ 必要であれば②の両辺をさらに微分したり, 式の形から  $f(x)$  が何次式か考えればよい.

☆複雑な式のときは  $f(t)$  の不定積分を  $F(t)$  とおくとよい. 上の②について  $F(x) - F(a) = g(x)$  と考えることができる. 解法としては遅いが, 何の関数か明確になるためミスは少ない.

### 解答解説

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt + x^2 \int_0^1 f(t) dt = 3x^2 + C \quad \cdots \textcircled{1} \quad \leftarrow \star$$

$$\textcircled{1} \text{ に } x = 0 \text{ を代入すると, } 0 = 0 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = 0 \quad \cdots \text{答え}$$

①の両辺を  $x$  について微分すると,

$$f(x) + 2x \int_0^1 f(t) dt = 6x \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ に } x = 0 \text{ を代入すると, } f(0) + 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = 0$$

②において,  $f(x)$  以外は 1 次式. これがあらゆる  $x$  について成立する (★恒等式) ためには,  $f(x)$  も 1 次式. この 2 つの条件から  $f(x) = ax$  とおける.

$$\text{これを} \textcircled{2} \text{ の左辺に代入すると, } ax + 2x \int_0^1 at dt = ax + 2x \left( \frac{1}{2} a \right) = 2ax$$

$$\therefore \textcircled{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2ax = 6x$$

$$\text{あらゆる } x \text{ についてこれが成立する (★恒等式) ためには, } 2a = 6 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3$$

$$\therefore f(x) = 3x \quad \cdots \text{答え}$$

☆  $x^2 f(t)$  を  $t$  について積分する場合,  $x^2$  は  $t$  にとっては定数である. ゆえに  $\int$  の前に出せる.

この変形を最初にして, 各項が  $x$  についての何次式なのかを考えよう.

2. 次の式があらゆる  $x$  について成立するとき  $f(x)$  と定数  $a$  を求めよ. (  $S$  級 4 分,  $A$  級 5 分 30 秒,  $B$  級 8 分,  $C$  級 12 分 )

$$\int_a^x f(t) dt = x^3 + 4 + \int_0^2 (x+t) f(t) dt$$

### 解答解説

$$\Leftrightarrow \int_a^x f(t) dt = x^3 + 4 + x \int_0^2 f(t) dt + \int_0^2 t f(t) dt \quad \cdots \textcircled{1}$$

①の両辺を  $x$  について微分すると,

$$f(x) = 3x^2 + \int_0^2 f(t) dt \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$b = \int_0^2 f(t) dt \text{ とおくと,}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow f(x) = 3x^2 + b \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 (3t^2 + b) dt = [t^3 + bt]_0^2 = 8 + 2b$$

$$\text{よって } b \text{ の定義から } b = 8 + 2b \Leftrightarrow b = -8$$

$$\therefore \textcircled{3} \text{ から } f(x) = 3x^2 - 8 \quad \cdots \text{答え}$$

①に  $x = a$  を代入すると,

$$0 = a^3 + 4 + a \int_0^2 f(t) dt + \int_0^2 t f(t) dt \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\int_0^2 t f(t) dt = \int_0^2 t(3t^2 - 8) dt = \int_0^2 (3t^3 - 8t) dt = \left[ \frac{3}{4} t^4 - 4t^2 \right]_0^2 = -4$$

$$\int_0^2 f(t) dt = b = -8$$

これらを④に代入すると,

$$\textcircled{4} \Leftrightarrow 0 = a^3 + 4 - 8a - 4$$

$$\Leftrightarrow a(a^2 - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0, \pm 2\sqrt{2} \quad \cdots \text{答え}$$