反射テスト　積分　積分方程式　基礎　01

1.　次の式があらゆる x について成立するとき $f(x)$ と 定数 a を求めよ.

（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 ）

(1)　$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = a$

(2)　$\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = x^2 + a$

(3)　$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - x$

(4)　$\displaystyle\int_{-1}^x t\,f(t)\,dt = 2x^3 + a$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2.　次の式があらゆる x について成立するとき $f(x)$ と 定数 a を求めよ.

（ S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分 ）

(1)　$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x + a$

(2)　$\displaystyle\int_{-1}^x f(t)\,dt = 4x^2 + a$

(3)　$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = 2x^2 + x - 6$

(4)　$\displaystyle\int_{-2}^x t\,f(t)\,dt = x^3 + x^2 + a$

反射テスト　積分　積分方程式　基礎　01　解答解説

1.　次の式があらゆる x について成立するとき $f(x)$ と 定数 a を求めよ.

（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 ）

★ 1　**積分方程式**

未知の関数が積分の中に現れる方程式のこと. 区間が変数ではない積分方程式もあるが, ここでは以下の問のように区間に変数がある形を練習する. これらはヴォルテラ積分方程式と呼ばれる.

★ 2　$\displaystyle \boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$

証明　$f(t)$ の不定積分を $F(t)$ とすれば, 左辺 $= \dfrac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\} = f(x)$

$F(a)$ は x にとって定数だから, 微分したら 0 になることに注意.

★ 3　$\displaystyle \boldsymbol{\int_a^x f(t)\,dt = g(x)}$ **の解き方**

①　$x=a$ を代入する. a から a までの定積分は 0 なので左辺は 0. ゆえに $g(a)=0$.

②　両辺を x について微分すると, 公式★ 2 から $f(x)=g'(x)$.

③　必要であれば②の両辺をさらに微分したり, 式の形から $f(x)$ が何次式か考えればよい.

☆複雑な式のときは★ 2 の証明のように $f(t)$ の不定積分を $F(t)$ とおくとよい. 上の②について $F(x)-F(a)=g(x)$ と考えることができる. 解法としては遅いが, 何の関数か明確になるためミスは少ない.

(1)　$\displaystyle \int_0^x f(t)\,dt = a$

$x=0$ を代入すると, 左辺 $=0$, 右辺 $=a$ であるから,

$\therefore$　$\boldsymbol{a=0}$　**…答え**

両辺を x について微分すると,

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = 0$$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{f(x)=0}$　**…答え**

(2)　$\displaystyle \int_1^x f(t)\,dt = x^2+a$

$x=1$ を代入すると, 左辺 $=0$, 右辺 $=1+a$ であるから,

$\therefore$　$a+1=0$　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{a=-1}$　**…答え**

両辺を x について微分すると,

$$\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)\,dt = 2x$$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{f(x)=2x}$　**…答え**

(3)　$\displaystyle \int_a^x f(t)\,dt = x^2-x$

$x=a$ を代入すると, 左辺 $=0$, 右辺 $=a^2-a$.

$\therefore$　$a^2-a=0$　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{a=0,1}$　**…答え**

両辺を x について微分すると,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = 2x-1$$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{f(x)=2x-1}$　**…答え**

(4)　$\displaystyle \int_{-1}^x t\,f(t)\,dt = 2x^3+a$

$x=-1$ を代入すると, 左辺 $=0$, 右辺 $=-2+a$.

$\therefore$　$a-2=0$　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{a=2}$　**…答え**

両辺を x について微分すると,

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^x t\,f(t)\,dt = 6x^2$$

$\Leftrightarrow$　$x\,f(x)=6x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=6x & (\ x\neq 0 \text{ のとき }) \\ f(x) \text{ はあらゆる関数} & (\ x=0 \text{ のとき }) \end{cases}$$

題意よりあらゆる x について与式が成立するから,

$\boldsymbol{f(x)=6x}$　**…答え**

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の式があらゆる x について成立するとき $f(x)$ と 定数 a を求めよ.

(S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分)

(1) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x + a$

$x = 0$ を代入すると, 左辺 $= 0$, 右辺 $= a$ であるから,

$\therefore \quad \boldsymbol{a = 0} \quad$ **…答え**

両辺を x について微分すると,

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = 1$$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f(x) = 1} \quad$ **…答え**

(2) $\displaystyle\int_{-1}^x f(t)\,dt = 4x^2 + a$

$x = -1$ を代入すると, 左辺 $= 0$, 右辺 $= 4 + a$ である.

$\therefore \quad a + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a = -4} \quad$ **…答え**

両辺を x について微分すると,

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^x f(t)\,dt = 8x$$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f(x) = 8x} \quad$ **…答え**

(3) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = 2x^2 + x - 6$

$x = a$ を代入すると, 左辺 $= 0$, 右辺 $= 2a^2 + a - 6$.

$\therefore \quad 2a^2 + a - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a+2)(2a-3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a = -2,\ \frac{3}{2}} \quad$ **…答え**

両辺を x について微分すると,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = 4x + 1$$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f(x) = 4x + 1} \quad$ **…答え**

(4) $\displaystyle\int_{-2}^x t\,f(t)\,dt = x^3 + x^2 + a$

$x = -2$ を代入すると, 左辺 $= 0$, 右辺 $= -4 + a$.

$\therefore \quad a - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a = 4} \quad$ **…答え**

両辺を x について微分すると,

$$\frac{d}{dx}\int_{-2}^x t\,f(t)\,dt = 3x^2 + 2x$$

$\Leftrightarrow \quad x\,f(x) = 3x^2 + 2x$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = 3x + 2 & (\ x \neq 0 \text{ のとき }) \\ f(x) \text{ はあらゆる関数} & (\ x = 0 \text{ のとき }) \end{cases}$$

題意よりあらゆる x について与式が成立するから,

$\boldsymbol{f(x) = 3x + 2} \quad$ **…答え**

ⓒ 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)