

反射テスト 積分 区間が変数の定積分の微分 01

1. 次の式を x について微分せよ. (S 級 20 秒, A 級 30 秒, B 級 45 秒, C 級 1 分)

(1) $\int_0^x 6t \, dt$

(2) $\int_2^x (y+1)^2 \, dy$

(3) $\int_1^x t f(t) \, dt$

(4) $\int_x^1 (s+1)(s-1) \, ds$

2. 次の式を x について微分 せよ. (S 級 25 秒, A 級 35 秒, B 級 47 秒, C 級 1 分)

(1) $\int_0^x t^5 dt$

(2) $\int_{-4}^x (y-1)^3 dy$

(3) $\int_2^x \{t^2 f(t) + t g(t)\} dt$

(4) $\int_x^3 s(s+1)(s+2)(s+3) ds$

反射テスト 積分 区間が変数の定積分の微分 01 解答解説

1. 次の式を x について微分せよ. (S 級 20 秒, A 級 30 秒, B 級 45 秒, C 級 1 分)

$$\star \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

証明 $f(t)$ の不定積分を $F(t)$ とすれば,

$$\text{左辺} = \frac{d}{dx} \{F(x) - F(a)\} = f(x)$$

$F(a)$ は x にとって定数だから, 微分したら 0 になることに注意.

$$(1) \int_0^x 6t dt$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x 6t dt = 6x \quad \cdots \text{答え}$$

☆別解

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^x 6t dt &= \frac{d}{dx} [3t^2]_0^x \\ &= \frac{d}{dx} (3x^2 - 3 \times 0^2) \\ &= \frac{d}{dx} (3x^2) \\ &= 6x \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

☆別解と比較すれば公式の威力がわかるだろう.

$$(2) \int_2^x (y+1)^2 dy$$

$$\frac{d}{dx} \int_2^x (y+1)^2 dy = (x+1)^2 \quad \cdots \text{答え}$$

☆区間が 2 から x であるが, 0 からだろうが 2 からだろうが関係ない.

☆次の議論の矛盾を考えて欲しい.

「与式に $x=2$ を代入すると 0 である.

答えに $x=2$ を代入すると 9 である.

0 を微分すると 0 だからこの答えは誤り.

ちなみにこの議論の矛盾点は 1 つだけではない.

答えは最後のページに記す.

$$(3) \int_1^x t f(t) dt$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_1^x t f(t) dt \\ = x f(x) \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

☆公式の $f(t)$ の部分が $t f(t)$ になっただけ.

$$(4) \int_x^1 (s+1)(s-1) ds$$

$$\begin{aligned} \int_x^1 (s+1)(s-1) ds \\ = - \int_1^x (s+1)(s-1) ds \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_x^1 (s+1)(s-1) ds \\ = - \frac{d}{dx} \int_1^x (s+1)(s-1) ds \\ = -(x+1)(x-1) \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

☆符号が逆転すること注意.

★定積分で区間が逆転すると, 定積分の符号が逆転.

証明 $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) \\ &= -\{F(a) - F(b)\} = - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

2. 次の式を x について微分せよ. (S 級 25 秒, A 級 35 秒, B 級 47 秒, C 級 1 分)

$$(1) \int_0^x t^5 dt$$

$$(2) \int_{-4}^x (y-1)^3 dy$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t^5 dt = x^5 \quad \cdots \text{答え}$$

$$\frac{d}{dx} \int_{-4}^x (y-1)^3 dy = (x-1)^3 \quad \cdots \text{答え}$$

$$(3) \int_2^x \{t^2 f(t) + t g(t)\} dt$$

$$(4) \int_x^3 s(s+1)(s+2)(s+3) ds$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_2^x \{t^2 f(t) + t g(t)\} dt \\ = x^2 f(x) + x g(x) \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_x^3 s(s+1)(s+2)(s+3) ds \\ = - \int_3^x s(s+1)(s+2)(s+3) ds \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_x^3 s(s+1)(s+2)(s+3) ds \\ = - \frac{d}{dx} \int_3^x s(s+1)(s+2)(s+3) ds \\ = -x(x+1)(x+2)(x+3) \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

☆ 1(2) の解説の議論の矛盾点

① 「0 を微分」…何について微分か不明.

② $F(2) = 0$ と $F'(2) = 9$ は両立する. …別におかしくない.

②の詳細

$F(x) = \int_2^x (t+1)^2 dt$ とおこう. (以下 xy 座標平面上での話をしたいので, 問題文の y は t で置き換えた.)

$F(2) = 0$ ということは, $y = F(x)$ の x 切片の 1 つが $x = 2$ であることを示している.

$(t+1)^2$ は t の 2 次式だから, $F(x)$ は x の 3 次式である. よって $F(2) = 0$ をより具体的に考えると, 3 次関数 $y = F(x)$ と x 軸との交点を考えたとき, その 1 つの x 座標が $x = 2$ ということにすぎない.

一方 $\frac{d}{dx} F(x) = F'(x)$ は $F(x)$ の導関数であり, $F'(2) = 9$ は $y = F(x)$ の $x = 2$ における接線の傾きである.

つまりこの議論を座標平面上で考えると, $y = F(x)$ は, 点 $(2, 0)$ で傾き 9 の接線をもつと言っているだけで, 何もおかしいところはない.