

反射テスト 積分 関数と定数 01

1. 次の式が x についての何次式か答えよ. ただし x によらない場合 (0 次式) は定数と記せ. また, x 以外の変数は, どれも x から独立しているものとする.
- (S 級 50 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

(1) $\int_0^2 x \, dx$

(2) $\int_0^x t \, dt$

(3) $\int_1^x (y^3 + y^2 + y + 1) \, dy$

(4) $\int_0^y f(x) \, dx$

(5) $\int_0^x tx \, dt$

(6) $\int_a^b (x + y)^2 \, dy$

2. 次の式が x についての何次式か答えよ. ただし x によらない場合 (0 次式) は定数と記せ. また, x 以外の変数は, どれも x から独立しているものとする.
(S 級 1 分, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

(1) $\int_a^b f(x) dx$

(2) $\int_0^x f(t) dt$ ただし $f(t)$ は t の 5 次式とする.

(3) $\int_1^{x^2} (y^3 + 1) dy$

(4) $\int_{a^2}^{b^2} x f(x) dx$

(5) $\int_x^z x^2 y^2 z^2 dy$

(6) $\int_a^x (x + y)^2 dy$

反射テスト 積分 関数と定数 01 解答解説

1. 次の式が x についての何次式か答えよ. ただし x によらない場合 (0 次式) は定数と記せ. また, x 以外の変数は, どれも x から独立しているものとする. (S 級 50 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

☆以下の解説では $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とおいたりして, どれも計算してある. しかしここでのテーマは **計算式を見て関数が定数か判断でき, 関数ならば何次式か予想できる** ようになることである. 各問の☆の注釈をよく読むこと.

★変数の独立

y が x によらないことを「独立している」という. また「自由である (free)」ともいう. 例えば長方形の縦の長さ y と横の長さ x は互いに独立している. しかし長方形の面積は縦の長さ y に依存しているため独立していない. 言葉を代えれば, 長方形の面積は縦の長さ y の関数である. この話は厳密に言うと言葉の定義に関わるので, 興味があれば大学で勉強してほしい.

$$(1) \quad \int_0^2 x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 = 2 \Rightarrow \text{定数} \quad \cdots \text{答え}$$

☆この式が x にとって **定数** であることに注意.

$$(2) \quad \int_0^x t \, dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^x = \frac{1}{2} x^2 \Rightarrow \text{2 次式} \quad \cdots \text{答え}$$

☆この式は x の **関数**.

$$(3) \quad \int_1^x (y^3 + y^2 + y + 1) \, dy$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{2} y^2 + y \right]_1^x \\ &= \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{25}{12} \end{aligned}$$

∴ **4 次式** $\cdots$ 答え

☆ y の 3 次式を y について積分するから, y の 4 次式. 定積分の区間は 1 から x までなので, x の 4 次式となる.

$$(4) \quad \int_0^y f(x) \, dx$$

$f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると,
与式 $= [F(x)]_0^y = F(y) - F(0)$

∴ **定数** $\cdots$ 答え

☆答えは y の関数だが, これが x の関数かどうかは場合による. 問に「どの変数も x から独立」とあるので, これは x にとって定数. もしも y が x の関数ならば, 与式は x の関数.

$$(5) \quad \int_0^x tx \, dt$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{2} xt^2 \right]_0^x \\ &= \frac{1}{2} x^3 \end{aligned}$$

∴ **3 次式** $\cdots$ 答え

☆ $\int_0^x tx \, dt = x \int_0^x t \, dt$ と変形して,
 $\int_0^x t \, dt$ は x の 2 次式と考えれば,
1 次式 $\times$ 2 次式 = 3 次式.

$$(6) \quad \int_a^b (x + y)^2 \, dy$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b (x^2 + 2xy + y^2) \, dy \\ &= \left[x^2 y + xy^2 + \frac{1}{3} y^3 \right]_a^b \\ &= (b - a)x^2 + (b^2 - a^2)x + \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \end{aligned}$$

∴ **2 次式** $\cdots$ 答え

☆ $\int_a^b (x^2 + 2xy + y^2) \, dy$
 $= x^2 \int_a^b 1 \, dy + 2x \int_a^b y \, dy + \int_a^b y^2 \, dy$
 x の最高次だけ考えると, $\int_a^b 1 \, dy$ は x にとって定数.
よって与式は x の 2 次式である.

2. 次の式が x についての何次式か答えよ。ただし x によらない場合 (0 次式) は定数と記せ。また, x 以外の変数は, どれも x から独立しているものとする。
(S 級 1 分, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

$$(1) \int_a^b f(x) dx$$

$$(2) \int_0^x f(t) dt \quad \text{ただし } f(t) \text{ は } t \text{ の 5 次式とする.}$$

$f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると,
与式 $= [F(x)]_a^b$
 $= F(b) - F(a)$

∴ 定数 …答え

☆この式が x にとって 定数 であることに注意.

$f(t)$ が t の 5 次式 $\Rightarrow$ 不定積分は 6 次式
区間は 0 から x までだから,

6 次式 …答え

☆ t について積分すると, t の次数 + 1.

$$(3) \int_1^{x^2} (y^3 + 1) dy$$

$$(4) \int_{a^2}^{b^2} x f(x) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{4} y^4 + y \right]_1^{x^2} \\ &= \frac{1}{4} (x^2)^4 + x^2 - \frac{5}{4} \\ &= \frac{1}{4} x^8 + x^2 - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

∴ 8 次式 …答え

$x f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると,
与式 $= [F(x)]_{a^2}^{b^2} = F(b^2) - F(a^2)$

∴ 定数 …答え

☆ y の 3 次式を y について積分するから, y の 4 次式. 定積分の区間は 1 から x^2 までなので, 4 次式に 2 次式を代入するイメージで x の 8 次式となる.

☆積分前の形に惑わされないこと. 最後に定数を代入するのだから定数.

$$(5) \int_x^z x^2 y^2 z^2 dy$$

$$(6) \int_a^x (x + y)^2 dy$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{3} x^2 z^2 \cdot y^3 \right]_x^z \\ &= \frac{1}{3} x^2 z^5 - \frac{1}{3} x^5 z^2 \end{aligned}$$

∴ 5 次式 …答え

$$\begin{aligned} &= \int_a^x (x^2 + 2xy + y^2) dy \\ &= \left[x^2 y + xy^2 + \frac{1}{3} y^3 \right]_a^x \\ &= \frac{7}{3} x^3 - ax^2 - a^2 x - \frac{1}{3} a^3 \end{aligned}$$

∴ 3 次式 …答え

$$\star \int_x^z x^2 y^2 z^2 dy = x^2 z^2 \int_x^z y^2 dy$$

不定積分 $\int y^2 dy$ は y の 3 次式だから,

定積分 $\int_x^z y^2 dy$ は x の 3 次式.

よって, 2 次式 $\times$ 3 次式 = 5 次式.

☆積分前, 積分後の次数を整理してを考えよう.

関数	x について	y について	x, y について
$(x + y)^2$	2 次式	2 次式	2 次式
y で不定積分	2 次式	3 次式	3 次式
y に x を代入	x の 2 次式	x の 3 次式	x, x の 3 次式