

反射テスト 積分 3 次関数の定積分 公式の利用 01

1. 次の式を積分せよ. ただし, k は x についての定数で, $k > 0$ とする. (S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分)

$$(1) \quad \int_{-1}^1 2x^3 dx$$

$$(2) \quad \int_{-2}^4 (x^3 - x) dx$$

$$(3) \quad \int_0^1 x(x-1)(x-3) dx$$

$$(4) \quad \int_1^2 4(x-1)(x-2)(x-3) dx$$

$$(5) \quad \int_0^4 (4x^2 - x^3) dx$$

$$(6) \quad \int_{-k}^k (x^3 - 2kx^2 + k^2x) dx$$

2. 次の式を積分せよ. ただし, k は x についての定数で, $k > 0$ とする. (S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分)

$$(1) \quad \int_{-3}^3 (3x^3 - 8x + 3) dx$$

$$(2) \quad \int_{-4}^2 (kx - x^3) dx$$

$$(3) \quad \int_2^6 x(x-2)(x-6) dx$$

$$(4) \quad \int_{-3}^1 6(x+3)(x-1)(x-3) dx$$

$$(5) \quad \int_0^k 3x^2(x-k) dx$$

$$(6) \quad \int_{-1}^1 (x+1)(x-k)(x-1) dx$$

反射テスト 積分 3 次関数の定積分 公式の利用 01 解答解説

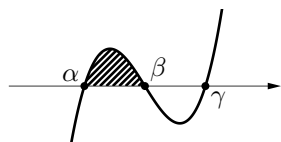
★ 公式 0 $\int_{-t}^t \text{奇関数} dx = 0 \quad \int_{-t}^t \text{偶関数} dx = 2 \int_0^t \text{偶関数} dx$

★ 公式 1 $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) dx = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^3(2\gamma - \alpha - \beta)$ ←下の (ア), (イ) どちらに対しても成立

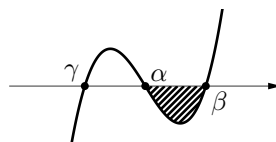
★ 公式 2 $\int_{\alpha}^{\beta} a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) dx = \frac{a}{12}(\beta - \alpha)^3(2\gamma - \alpha - \beta)$ ←公式 1 の定数 a 倍

公式 1 と 2 は絶対に覚えなければならない公式ではないが, 計算がとても楽になる.

(ア) $y = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ ただし $\alpha \leq \beta \leq \gamma$



(イ) $y = (x - \gamma)(x - \alpha)(x - \beta)$ ただし $\gamma \leq \alpha \leq \beta$



1. 次の式を積分せよ. ただし, k は x についての定数で, $k > 0$ とする. (S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分)

(1) $\int_{-1}^1 2x^3 dx$

$= 2 \int_{-1}^1 x^3 dx$

奇関数であるから,

与式 = 0 ...答え

(2) $\int_{-2}^4 (x^3 - x) dx$

奇関数の和も奇関数であるから,

与式 $= \int_{-2}^2 (x^3 - x) dx + \int_2^4 (x^3 - x) dx$

$= 0 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_2^4$

$= (64 - 8) - (4 - 2) = 56 - 2 = 54$...答え

(3) $\int_0^1 x(x - 1)(x - 3) dx$

与式 $= \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1$

$= \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{5}{12}$...答え

(4) $\int_1^2 4(x - 1)(x - 2)(x - 3) dx$

与式 $= 4 \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx$

$= 4 \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x \right]_1^2 = 1$...答え

別解 (★公式 1 の (ア))

与式 $= 4 \int_1^2 (x - 1)(x - 2)(x - 3) dx$

$= 4 \cdot \frac{1}{12}(2 - 1)^3 \cdot (2 \cdot 3 - 1 - 2) = 1$

(5) $\int_0^4 (4x^2 - x^3) dx$

$= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^4 = \frac{64}{3}$...答え

別解 (★公式 1 $\gamma = \alpha = 0, \beta = 4$)

与式 $= \int_0^4 \{-x^2(x - 4)\} dx$

$= - \int_0^4 \{x^2(x - 4)\} dx$

$= -\frac{1}{12}\{4 - 0\}^3 \cdot (2 \cdot 0 - 0 - 4)$ ←★公式 1 (イ)

$= -\frac{1}{12} \cdot 64 \cdot (-4) = \frac{64}{3}$...答え

(6) $\int_{-k}^k (x^3 - 2kx^2 + k^2x) dx$

☆公式 1 を用いてもよいが, 奇関数の方が早い.

与式 $= \int_{-k}^k x^3 dx - 2k \int_{-k}^k x^2 dx + k^2 \int_{-k}^k x dx$

$= -2k \int_{-k}^k x^2 dx = -4k \int_0^k x^2 dx$

$= -4k \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^k = -\frac{4k}{3} \cdot k^3$

$= -\frac{4}{3}k^4$...答え

2. 次の式を積分せよ. ただし, k は x についての定数で, $k > 0$ とする. (S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int_{-3}^3 (3x^3 - 8x + 3) dx \\
 &= 3 \int_{-3}^3 x^3 dx - 8 \int_{-3}^3 x dx + 3 \int_{-3}^3 1 dx \\
 &= 6 \int_0^3 1 dx = 6 \cdot 3 = \mathbf{18} \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \int_{-4}^2 (kx - x^3) dx \\
 & \text{奇関数の和も奇関数であるから,} \\
 & \text{与式} = \int_{-4}^{-2} (kx - x^3) dx + \int_{-2}^2 (ax - x^3) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_{-4}^{-2} + 0 \\
 &= (2k - 4) - (8k - 64) = \mathbf{-6k + 60} \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \int_2^6 x(x-2)(x-6) dx \\
 & \text{与式} = \int_2^6 (x^3 - 8x^2 + 12x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{8}{3} x^3 + 6x^2 \right]_2^6 \\
 &= (324 - 576 + 216) - \left(4 - \frac{64}{3} + 24 \right) \\
 &= -36 - \frac{20}{3} = \mathbf{-\frac{128}{3}} \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

別解 (★公式 1 の (イ))

$$\text{与式} = \frac{1}{12} \cdot (6-2)^3 \cdot (2 \cdot 0 - 2 - 6) = \mathbf{-\frac{128}{3}}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \int_{-3}^1 6(x+3)(x-1)(x-3) dx \\
 & \text{与式} = 6 \int_{-3}^1 (x^3 - x^2 - 9x + 9) dx \\
 &= 6 \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{9}{2} x^2 + 9x \right]_{-3}^1 = \mathbf{256} \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

別解 (★公式 1 の (ア))

$$\begin{aligned}
 & \text{与式} = 6 \int_{-3}^1 (x+3)(x-1)(x-3) dx \\
 &= 6 \cdot \frac{1}{12} \{1 - (-3)\}^3 \cdot \{2 \cdot 3 - (-3) - 1\} \quad \leftarrow \text{★公式 1 (ア)} \\
 &= \mathbf{256} \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \int_0^k 3x^2(x-k) dx \\
 &= 3 \int_0^k x^3 - kx^2 dx \\
 &= 3 \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} kx^3 \right]_0^k \\
 &= \mathbf{-\frac{1}{4} k^4} \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

別解 (★公式 1)

$k = 0$ のとき, 与式 $= 0$

$k > 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
 & \text{与式} = 3 \cdot \frac{1}{12} (k-0)^3 \cdot (2 \cdot 0 - 0 - k) \quad \leftarrow \text{★公式 1 (イ)} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot k^3 \cdot (-k) = \mathbf{-\frac{1}{4} k^4}
 \end{aligned}$$

$k < 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
 & \text{与式} = -3 \int_k^0 (x-k)x^2 dx \\
 &= -3 \cdot \frac{1}{12} (0-k)^3 \cdot (2 \cdot 0 - k - 0) \quad \leftarrow \text{★公式 1 (ア)} \\
 &= \mathbf{-\frac{1}{4} k^4}
 \end{aligned}$$

まとめると, 与式 $= \mathbf{-\frac{1}{4} k^4}$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \int_{-1}^1 (x+1)(x-k)(x-1) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (x^2 - 1)(x-k) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (x^3 - kx^2 - x + k) dx \\
 &= 2 \int_0^1 (-kx^2 + k) dx \\
 &= 2 \left[-\frac{1}{3} kx^3 + kx \right]_0^1 \\
 &= 2 \left(-\frac{1}{3} k + k \right) \\
 &= \mathbf{\frac{4}{3} k} \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

別解 (★公式)

$$\begin{aligned}
 & \text{与式} = \frac{1}{12} \{1 - (-1)\}^3 \cdot \{2 \cdot k - 1 - (-1)\} \quad \leftarrow \text{★公式} \\
 &= \frac{1}{12} \cdot 2^3 \cdot 2k = \mathbf{\frac{4}{3} k}
 \end{aligned}$$