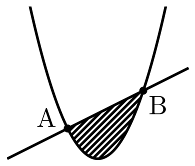
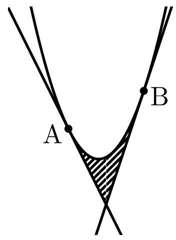
反射テスト　積分　定積分　２次関数と直線で囲まれた面積の公式　01

1.　次の斜線部分の面積を求めよ. (S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1)　$\begin{cases} \text{放物線} & y = 2x^2 \\ \text{直線 AB} & y = 4x + 16 \end{cases}$

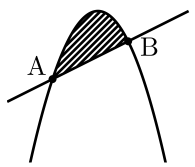


(2)　$\begin{cases} \text{放物線} & y = x^2 \\ \text{直線 AB} & y = 2x + 15 \end{cases}$

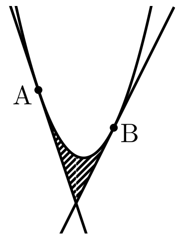


2. 次の斜線部分の面積を求めよ.(S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) $\begin{cases} \text{放物線} & y=-2x^2 \\ \text{直線 AB} & y=x-6 \end{cases}$

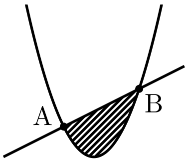


(2) $\begin{cases} \text{放物線} & y=\dfrac{1}{2}x^2 \\ \text{直線 AB} & y=-2x+\dfrac{5}{2} \end{cases}$



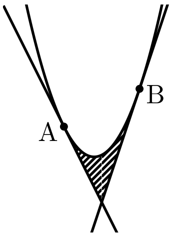
反射テスト　積分　定積分　２次関数と直線で囲まれた面積の公式　01　解答解説

1.　次の斜線部分の面積を求めよ.（ S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）



★ 放物線と直線で囲まれた部分の面積公式

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ と 直線 $y = dx + e$ の交点を A, B とする.
ただし, x 座標の小さい方を A とし, A, B の x 座標を α, β とする.
このとき, 左図の斜線部の面積 S_1 は,　$\boldsymbol{S_1 = \dfrac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3}$

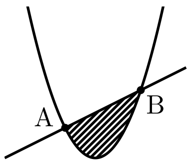


★ 放物線と 2 つの接線で囲まれた部分の面積公式

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ 上の点 A, B とその接線を左図のように考える.
ただし, x 座標の小さい方を A とし, A, B の x 座標を α, β とする.
このとき, 左図の斜線部の面積 S_2 は,　$\boldsymbol{S_2 = \dfrac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3}$

☆ S_1 と S_2 の面積比　以上から, 直線 AB と放物線で囲まれた部分の面積 S_1 と,
A, B を接点とする 2 つの接線と放物線で囲まれた部分の面積 S_2 の面積比は, $\boldsymbol{S_1 : S_2 = 2 : 1}$

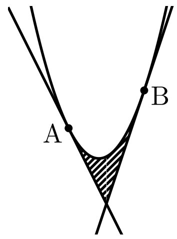
(1)　$\begin{cases} \text{放物線} & y = 2x^2 \\ \text{直線 AB} & y = 4x + 16 \end{cases}$



交点 A, B の x 座標
$2x^2 = 4x + 16$
$\Leftrightarrow\quad x = -2, 4$

$$\int_{-2}^{4} \left(4x + 16 - 2x^2\right) dx$$
$$= \frac{|2|}{6} \cdot \{4 - (-2)\}^3 = \mathbf{72}$$　**…答え**

(2)　$\begin{cases} \text{放物線} & y = x^2 \\ \text{直線 AB} & y = 2x + 15 \end{cases}$



接点 A, B の x 座標
$x^2 = 3x + 15$
$\Leftrightarrow\quad x = -3, 5$

$$\frac{|1|}{12} \cdot \{5 - (-3)\}^3 = \mathbf{\frac{128}{3}}$$　**…答え**

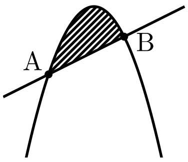
☆別解 (公式を使わない場合)
$y = x^2 \quad\Rightarrow\quad y' = 2x$ より,
A の接線は $y - 9 = -6\{x - (-3)\}$
B の接線は $y - 25 = 10(x - 5)$
2 つの接線の交点は $(1, -15)$　←★

$$\int_{-3}^{1} \left[x^2 - \{-6(x+3) + 9\}\right] dx + \int_{1}^{5} \left[x^2 - \{10(x-5) + 25\}\right] dx$$
$$= \int_{-3}^{1} (x+3)^2\, dx + \int_{1}^{5} (x-5)^2\, dx$$
$$= \left[\tfrac{1}{3}(x+3)^3\right]_{-3}^{1} + \left[\tfrac{1}{3}(x-5)^3\right]_{1}^{5}$$
$$= \tfrac{1}{3}\left\{4^3 - 0^3 + 0^3 - (-4)^2\right\}$$
$$= \tfrac{1}{3} \times (64 + 64) = \tfrac{128}{3}$$

★「接線の交点の x 座標は, 接点の x 座標の平均」
これを知っているとちょっと早い.

2.　次の斜線部分の面積を求めよ. (S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) $\begin{cases} \text{放物線} & y=-2x^2 \\ \text{直線 AB} & y=x-6 \end{cases}$



交点 A, B の x 座標

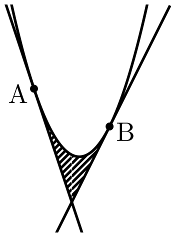
$$-2x^2=x-6$$

$$\Leftrightarrow\quad x=-2,\ \frac{3}{2}$$

$$\int_{-2}^{\frac{3}{2}}\{x-6-(-2x^2)\}\,dx$$

$$=\frac{|-2|}{6}\cdot\left\{\frac{3}{2}-(-2)\right\}^3=\mathbf{\frac{343}{24}}$$ **…答え**

(2) $\begin{cases} \text{放物線} & y=\dfrac{1}{2}x^2 \\ \text{直線 AB} & y=-2x+\dfrac{5}{2} \end{cases}$



接点 A, B の x 座標

$$\frac{1}{2}x^2=-2x+\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad x=-5,1$$

$$\frac{|\frac{1}{2}|}{12}\cdot\{1-(-5)\}^3=\mathbf{9}$$ **…答え**

☆別解 (公式を使わない場合)

$y=\frac{1}{2}x^2 \quad\Rightarrow\quad y'=x$ より,

A の接線は $y-\frac{25}{2}=-5\{x-(-5)\}$

B の接線は $y-\frac{1}{2}=1(x-1)$

2 つの接線の交点は $\left(-2,-\frac{5}{2}\right)$　←★

$$\int_{-5}^{-2}\left[\tfrac{1}{2}x^2-\left\{-5(x+5)+\tfrac{25}{2}\right\}\right]dx$$

$$+\int_{-2}^{1}\left[\tfrac{1}{2}x^2-\left\{1(x-1)+\tfrac{1}{2}\right\}\right]dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_{-5}^{-2}(x+5)^2\,dx+\tfrac{1}{2}\int_{-2}^{1}(x-1)^2\,dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{3}(x+5)^3\right]_{-5}^{-2}+\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{3}(x-1)^3\right]_{-2}^{1}$$

$$=\tfrac{1}{6}\left\{3^3-0^3+0^3-(-3)^2\right\}$$

$$=\tfrac{1}{6}\times(27+27)=9$$

★「接線の交点の x 座標は, 接点の x 座標の平均」
これを知っているとちょっと早い.