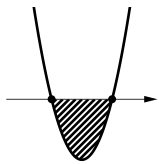


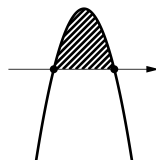
反射テスト 積分 定積分 2次関数と面積の公式 02

1. 次の斜線部分の面積を求めよ。(*S* 級 3 分, *A* 級 4 分 30 秒, *B* 級 6 分 30 秒, *C* 級 9 分)

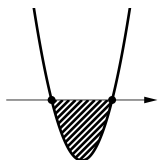
(1) $y = x^2 - 5x + 6$



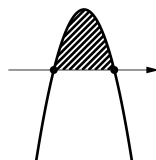
(2) $y = -3x^2 + 10x + 8$



(3) $y = x^2 + 4x - 6$

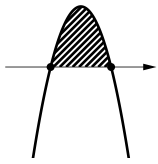


(4) $y = -6x^2 - 13x - 4$

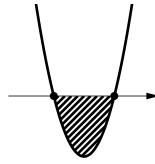


2. 次の斜線部分の面積を求めよ。(*S* 級 3 分, *A* 級 4 分 30 秒, *B* 級 6 分 30 秒, *C* 級 9 分)

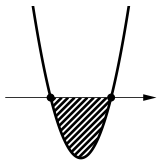
(1) $y = -5x^2 + 45$



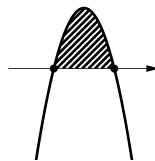
(2) $y = 2x^2 - x - 6$



(3) $y = x^2 - 8x + 4$



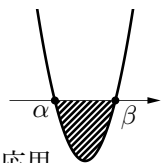
(4) $y = -12x^2 - 16x - 1$



反射テスト 積分 定積分 2次関数と面積の公式 02 解答解説

1. 次の斜線部分の面積を求めよ。(S級3分, A級4分30秒, B級6分30秒, C級9分)

$$y = ax^2 + bx + c$$



★ $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ と x 軸で囲まれた部分 (左図の斜線部) の面積は, $\frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$ である.

出題頻度が高く, 作業速度・精度ともに向上する, とても重要な公式である.

また放物線の向き (上に凸か下に凸) が関係なく使用可能である.

応用

x 軸が2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ を切り取る長さは $\frac{\sqrt{D}}{a}$ ($D = b^2 - 4ac$) $\Rightarrow \beta - \alpha = \frac{\sqrt{D}}{a}$

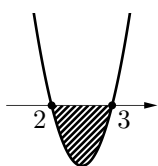
$\therefore$ 面積の公式は, $\frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{\sqrt{D}^3}{6a^2}$

★ $y = ax^2 + bx + c$ と x 軸で囲まれた部分 (左図の斜線部) の面積は, $\frac{\sqrt{D}^3}{6a^2}$ である.

☆この公式は, x 切片が無理数のとき, 答えだけを求めるのであればやや楽である.

(1) $y = x^2 - 5x + 6$

(2) $y = -3x^2 + 10x + 8$



$$y = (x - 2)(x - 3)$$

$\therefore x$ 切片は 2, 3

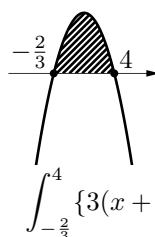
$$\int_2^3 \{0 - (x - 2)(x - 3)\} dx$$

$$= \frac{|1|}{6} (3 - 2)^3 = \frac{1}{6} \quad \dots \text{答え}$$

☆別解 (応用の公式)

右辺 = 0 の判別式 $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$

$\Rightarrow$ 面積は $\frac{\sqrt{1}^3}{6 \cdot 1^2} = \frac{1}{6}$



$$y = -(3x + 2)(x - 4)$$

$$\Leftrightarrow y = -3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 4)$$

$\therefore x$ 切片は $-\frac{2}{3}, 4$

$$\int_{-\frac{2}{3}}^4 \{3(x + \frac{2}{3})(x - 4) - 0\} dx$$

$$= \frac{|-3|}{6} \cdot \left\{4 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right\}^3 = \frac{1372}{27} \quad \dots \text{答え}$$

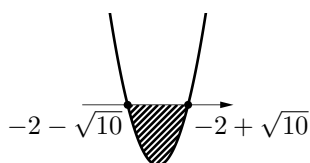
☆別解 (応用の公式)

右辺 = 0 の判別式 $D = 10^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 8 = 196$

$\Rightarrow$ 面積は $\frac{\sqrt{196}^3}{6 \cdot (-3)^2} = \frac{1372}{27}$

(3) $y = x^2 + 4x - 6$

(4) $y = -6x^2 - 13x - 4$



右辺 = 0 の判別式 $D/4$ は,
 $D/4 = 2^2 - 1 \cdot (-6) = 10 > 0$
 解の公式から, x 切片は $-2 \pm \sqrt{10}$

$$y = \{x - (-2 - \sqrt{10})\}\{x - (-2 + \sqrt{10})\}$$

$$\int_{-2-\sqrt{10}}^{-2+\sqrt{10}} \{0 - (x^2 + 4x - 6)\} dx$$

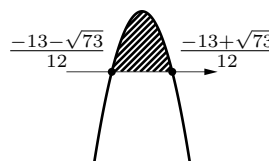
$$= \frac{|1|}{6} \{(-2 + \sqrt{10}) - (-2 - \sqrt{10})\}^3 = \frac{40\sqrt{10}}{3} \quad \dots \text{答え}$$

☆別解 (応用の公式)

$$D/4 = 10 \Leftrightarrow D = 40$$

($D/4$ のまま使ってはいけない.)

面積は $\frac{\sqrt{40}^3}{6 \cdot 1^2} = \frac{40\sqrt{10}}{3}$



$y = -(6x^2 + 13x + 4)$
 右辺 = 0 の判別式 D は,
 $D = 13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 4 = 73 > 0$
 解の公式から, x 切片は $\frac{-13 \pm \sqrt{73}}{12}$

$$y = -6\left(x - \frac{-13 - \sqrt{73}}{12}\right)\left(x - \frac{-13 + \sqrt{73}}{12}\right)$$

$$\int_{\frac{-13-\sqrt{73}}{12}}^{\frac{-13+\sqrt{73}}{12}} \{(-6x^2 - 13x - 4) - 0\} dx$$

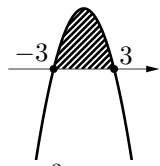
$$= \frac{|-6|}{6} \left(\frac{-13 + \sqrt{73}}{12} - \frac{-13 - \sqrt{73}}{12}\right)^3 = \frac{73\sqrt{73}}{216} \quad \dots \text{答え}$$

☆別解 (応用の公式)

面積は $\frac{\sqrt{73}^3}{6 \cdot (-6)^2} = \frac{73\sqrt{73}}{216}$

2. 次の斜線部分の面積を求めよ。(S級3分, A級4分30秒, B級6分30秒, C級9分)

(1) $y = -5x^2 + 45$

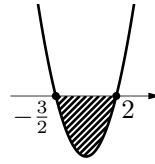


$$y = -5(x-3)(x+3)$$

$\therefore x$ 切片は $-3, 3$

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^3 \{-5(x+3)(x-3) - 0\} dx \\ &= \frac{|-5|}{6} \cdot \{3 - (-3)\}^3 \\ &= 180 \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

(2) $y = 2x^2 - x - 6$



$$\begin{aligned} y &= (2x+3)(x-2) \\ \Leftrightarrow y &= 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2) \\ \therefore x \text{ 切片は } &-\frac{3}{2}, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{3}{2}}^2 \{0 - 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)\} dx \\ &= \frac{|2|}{6} \left\{2 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right\}^3 \\ &= \frac{343}{24} \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

☆別解 (応用の公式)

右辺 = 0 の判別式 $D = 0^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 45 = 900$

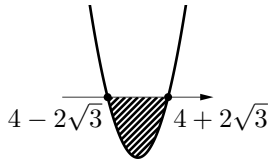
$\Rightarrow$ 面積は $\frac{\sqrt{900^3}}{6 \cdot (-5)^2} = 180$

☆別解 (応用の公式)

右辺 = 0 の判別式 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 49$

$\Rightarrow$ 面積は $\frac{\sqrt{49^3}}{6 \cdot 2^2} = \frac{343}{24}$

(3) $y = x^2 - 8x + 4$



右辺 = 0 の判別式 $D/4$ は,
 $D/4 = (-4)^2 - 1 \cdot 4 = 12 > 0$
 解の公式から, x 切片は $4 \pm 2\sqrt{3}$

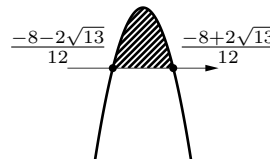
$$\begin{aligned} y &= \{x - (4 - 2\sqrt{3})\} \{x - (4 + 2\sqrt{3})\} \\ & \int_{4-2\sqrt{3}}^{4+2\sqrt{3}} \{0 - (x^2 - 8x + 4)\} dx \\ &= \frac{|1|}{6} \{(4 + 2\sqrt{3}) - (4 - 2\sqrt{3})\}^3 \\ &= 32\sqrt{3} \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

☆別解 (応用の公式)

$D/4 = 12 \Leftrightarrow D = 48$

面積は $\frac{\sqrt{48^3}}{6 \cdot 1^2} = 32\sqrt{3}$

(4) $y = -12x^2 - 16x - 1$



$y = -(12x^2 + 16x + 1)$
 右辺 = 0 の判別式 $D/4$ は,
 $D/4 = 8^2 - 12 \cdot 1 = 52 > 0$
 解の公式から, x 切片は $\frac{-8 \pm 2\sqrt{13}}{12}$

$$\begin{aligned} y &= -12 \left(x - \frac{-8-2\sqrt{13}}{12} \right) \left(x - \frac{-8+2\sqrt{13}}{12} \right) \\ & \int_{\frac{-8-2\sqrt{13}}{12}}^{\frac{-8+2\sqrt{13}}{12}} \{(-12x^2 - 16x - 1) - 0\} dx \\ &= \frac{|-12|}{6} \left(\frac{-8+2\sqrt{13}}{12} - \frac{-8-2\sqrt{13}}{12} \right)^3 \\ &= \frac{26\sqrt{13}}{27} \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

☆別解 (応用の公式)

$D/4 = 52 \Leftrightarrow D = 208$

面積は $\frac{\sqrt{208^3}}{6 \cdot (-12)^2} = \frac{26\sqrt{13}}{27}$