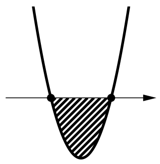
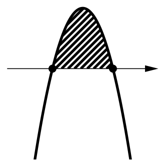
反射テスト　積分　定積分　２次関数と面積の公式　01

1.　次の斜線部分の面積を求めよ. (S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 4 分 40 秒, C 級 6 分)

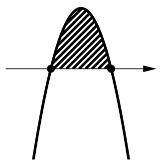
(1)　$y = x^2 - 6x + 5$



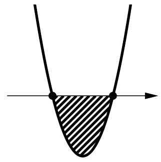
(2)　$y = -2x^2 - 2x + 4$



(3)　$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

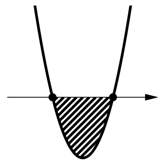


(4)　$y = 3x^2 + 7x - 6$

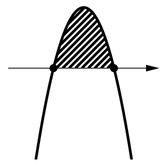


2. 次の斜線部分の面積を求めよ. (S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 4 分 40 秒, C 級 6 分)

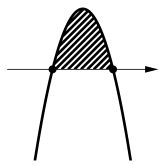
(1) $y = x^2 + 2x - 8$



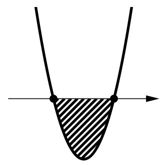
(2) $y = -4x^2 - 20x - 24$



(3) $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{5}{2}x - 4$



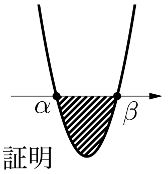
(4) $y = 6x^2 - 5x - 6$



反射テスト　積分　定積分　２次関数と面積の公式　01　解答解説

1.　次の斜線部分の面積を求めよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 4 分 40 秒, C 級 6 分 ）

$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$



★ $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と x 軸で囲まれた部分（左図の斜線部）の面積は, $\boldsymbol{\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3}$ である.
出題頻度が高く, 作業速度・精度ともに向上する, とても重要な公式である.
また放物線の向き（上に凸か下に凸）か関係なく使用可能である.

証明

$a>0$ のとき, 斜線部分は x 軸（$y=0$）の下にあるから, 斜線部分の面積は,

$$\int_\alpha^\beta \{0-a(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx=-a\int_\alpha^\beta\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx=-a\left[\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta$$

$$=-a\cdot\tfrac{\beta-\alpha}{6}\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\quad\cdots①$$

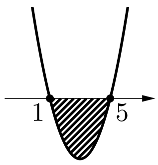
$a<0$ のとき, 斜線部分は x 軸（$y=0$）の上にあるから, 斜線部分の面積は,

$$\int_\alpha^\beta\{a(x-\alpha)(x-\beta)-0\}\,dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\quad\cdots②$$

$\therefore$　①, ② から斜線部分の面積は, $\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ と表せる.

★ $\displaystyle\boldsymbol{\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3}$　☆注意. 単に定積分したときは係数の正負に注意.

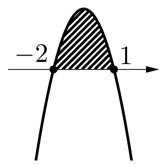
(1)　$y=x^2-6x+5$



$y=(x-1)(x-5)$
$\therefore x$ 切片は 1 , 5

$$\int_1^5\{0-(x-1)(x-5)\}\,dx$$
$$=\frac{|1|}{6}\cdot(5-1)^3=\boldsymbol{\frac{32}{3}}$$ **…答え**

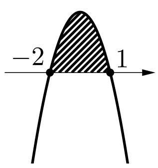
(2)　$y=-2x^2-2x+4$



$y=-2(x+2)(x-1)$
$\therefore x$ 切片は -2 , 1

$$\int_{-2}^1\{-2(x+2)(x-1)-0\}\,dx$$
$$=\frac{|-2|}{6}\cdot\{1-(-2)\}^3=\boldsymbol{9}$$ **…答え**

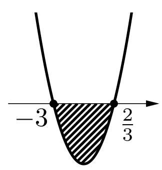
(3)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+6$



$\Leftrightarrow$　$y=-\frac{1}{2}(x^2-4x-12)$
$y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-6)$
$\therefore x$ 切片は -2 , 6

$$\int_{-2}^6\left\{\tfrac{1}{2}(x+2)(x-6)-0\right\}dx$$
$$=\frac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{6}\cdot\{6-(-2)\}^3=\boldsymbol{\frac{128}{3}}$$ **…答え**

(4)　$y=3x^2+7x-6$

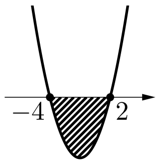


$y=(x+3)(3x-2)$
$\Leftrightarrow$　$y=3(x+3)\left(x-\frac{2}{3}\right)$
$\therefore x$ 切片は -3 , $\frac{2}{3}$

$$\int_{-3}^{\frac{2}{3}}\left\{0-3(x+3)\left(x-\tfrac{2}{3}\right)\right\}dx$$
$$=\frac{|3|}{6}\cdot\left\{\frac{2}{3}-(-3)\right\}^3=\boldsymbol{\frac{1331}{54}}$$ **…答え**

2.　次の斜線部分の面積を求めよ.(S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 4 分 40 秒, C 級 6 分)

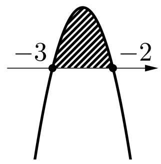
(1)　$y = x^2 + 2x - 8$



$y = (x+4)(x-2)$
$\therefore$ x 切片は -4 , 2

$$\int_{-4}^{2} \{0 - (x^2 + 2x - 8)\}\, dx$$
$$= \frac{|1|}{6} \cdot \{2 - (-4)\}^3$$
$$= \mathbf{36}$$ **…答え**

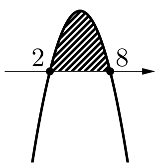
(2)　$y = -4x^2 - 20x - 24$



$y = -4(x+3)(x+2)$
$\therefore$ x 切片は -3 , -2

$$\int_{-3}^{-2} \{-4(x+3)(x+2) - 0\}\, dx$$
$$= \frac{|-4|}{6} \cdot \{-2 - (-3)\}^3$$
$$= \mathbf{\frac{2}{3}}$$ **…答え**

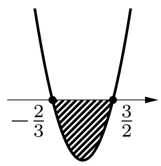
(3)　$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - 4$



$\Leftrightarrow$ $y = -\frac{1}{4}(x^2 - 10x + 16)$
$y = -\frac{1}{4}(x-2)(x-8)$
$\therefore$ x 切片は 2 , 8

$$\int_{2}^{8} \left\{ \frac{1}{4}(x-2)(x-8) - 0 \right\} dx$$
$$= \frac{\left|\frac{1}{4}\right|}{6} \cdot (8-2)^3$$
$$= \mathbf{9}$$ **…答え**

(4)　$y = 6x^2 - 5x - 6$



$\Leftrightarrow$ $y = (3x+2)(2x-3)$
$y = 6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$
$\therefore$ x 切片は $-\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$

$$\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{3}{2}} \left\{ 0 - \{6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)\right\} dx$$
$$= \frac{|6|}{6} \cdot \left\{ \frac{3}{2} - (-\frac{2}{3}) \right\}^3$$
$$= \mathbf{\frac{2197}{216}}$$ **…答え**