

反射テスト 積分 2次整式の定積分 01

1. 次の式を積分せよ. (*S* 級 1 分 40 秒, *A* 級 2 分 50 秒, *B* 級 4 分 20 秒, *C* 級 6 分)

(1) $\int_0^6 x^2 \, dx$

(2) $\int_{-1}^2 (x^2 - x) \, dx$

(3) $\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) \, dx$

(4) $\int_{-2}^3 (6 + x - x^2) \, dx$

2. 次の式を積分せよ. (*S* 級 1 分 40 秒, *A* 級 2 分 50 秒, *B* 級 4 分 20 秒, *C* 級 6 分)

(1) $\int_0^2 3x^2 \, dx$

(2) $\int_{-1}^3 (x^2 + x) \, dx$

(3) $\int_2^3 (x^2 - 5x + 6) \, dx$

(4) $\int_{-6}^1 (6 - 5x - x^2) \, dx$

反射テスト 積分 2次整式の定積分 01 解答解説

1. 次の式を積分せよ。(S級1分40秒, A級2分50秒, B級4分20秒, C級6分)

$$\star \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

出題頻度も高く, 作業速度・精度ともに向上する重要な公式である.

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta(\beta - \alpha) = \frac{\beta - \alpha}{6} \{2(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) - 3(\alpha + \beta)^2 + 6\alpha\beta\} = \frac{\beta - \alpha}{6} (-\beta^2 + 2\alpha\beta - \alpha^2) = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

以上の公式から, 以下の公式が導かれる.

$$\star \int_{\alpha}^{\beta} a(x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$$

($\star a(x - \alpha)(x - \beta)$ を x 軸で切り取った部分の面積は, $\frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$ ←☆この公式だけを覚えているのは危険.)

$$(1) \quad \int_0^6 x^2 dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^6 \\ &= \frac{1}{3} \times 6^3 - 0 \\ &= 72 \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \int_{-1}^2 (x^2 - x) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3 \\ &= (9 - 18 + 9) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) \\ &= 0 - \frac{4}{3} \\ &= -\frac{4}{3} \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \int_{-2}^3 (6 + x - x^2) dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^3 (-x^2 + x + 6) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^3 \\ &= \left(-9 + \frac{9}{2} + 18\right) - \left(\frac{8}{3} + 2 - 12\right) \\ &= 9 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} + 10 \\ &= \frac{125}{6} \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

☆別解 上にあげた公式が使える.

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_1^3 (x - 1)(x - 3) dx \\ &= -\frac{1}{6}(3 - 1)^3 = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

この公式の威力がわかると思う.

☆別解 上にあげた公式が使える.

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_{-2}^3 \{-(x + 2)(x - 3)\} dx \\ &= -\frac{1}{6}\{3 - (-2)\}^3 = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

2. 次の式を積分せよ. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分)

$$(1) \quad \int_0^2 3x^2 \, dx$$

$$= [x^3]_0^2$$

$$= 2^3 - 0$$

$$= 8 \quad \cdots \text{答え}$$

$$(2) \quad \int_{-1}^3 (x^2 + x) \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^3$$

$$= \left(9 + \frac{9}{2} \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 9 + \frac{9}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{40}{3} \quad \cdots \text{答え}$$

$$(3) \quad \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_2^3$$

$$= \left(9 - \frac{45}{2} + 18 \right) - \left(\frac{8}{3} - 10 + 12 \right)$$

$$= 27 - \frac{45}{2} - \frac{8}{3} - 2$$

$$= \frac{150 - 135 - 16}{6}$$

$$= -\frac{1}{6} \quad \cdots \text{答え}$$

$$(4) \quad \int_{-6}^1 (6 - 5x - x^2) \, dx$$

$$= \int_{-6}^1 (-x^2 - 5x + 6) \, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_{-6}^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6 \right) - (72 - 90 - 36)$$

$$= -\frac{2}{6} - \frac{15}{6} + 6 + 54$$

$$= \frac{343}{6} \quad \cdots \text{答え}$$

☆別解 公式が使える.

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_2^3 (x-2)(x-3) \, dx \\ &= -\frac{1}{6}(3-2)^3 = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

☆別解 公式が使える.

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_{-6}^1 \{-(x+6)(x-1)\} \, dx \\ &= -\frac{1}{6}\{1 - (-6)\}^3 = \frac{343}{6} \end{aligned}$$