

反射テスト 整式 3次式の解と係数の関係 01

1. 次の問に答えよ. (*S* 級 1 分 15 秒, *A* 級 2 分, *B* 級 3 分 20 秒, *C* 級 5 分)

(1) $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$ を因数分解せよ.

(2) $x^3 + 3x^2 - 5x - 9 = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき次式の値を求めよ.

① $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

② $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

2. 次の間に答えよ。(S級1分50秒, A級3分, B級4分40秒, C級6分30秒)

(1) $(x + \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ を x について展開せよ. つまり α, β, γ については展開する必要はない.

(2) $2x^3 - 3x^2 - 6x + 1 = 0$ の3つの解を α, β, γ とするとき次式の値を求めよ.

① $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

② $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

反射テスト 整式 3次式の解と係数の関係 01 解答解説

1. 次の間に答えよ。(S級 1分15秒, A級 2分, B級 3分20秒, C級 5分)

(1) $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$ を因数分解せよ.

$$\text{与式} = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

★公式

3次方程式の解と係数の関係を表す. この因数分解は覚えておこう.

★3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) の解が $x = \alpha, \beta, \gamma$ であるとき,

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} &= \alpha + \beta + \gamma \\ -\frac{c}{a} &= \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \\ -\frac{d}{a} &= \alpha\beta\gamma \end{cases}$$

☆正負に気をつけよう.

(2) $x^3 + 3x^2 - 5x - 9 = 0$ の3つの解を α, β, γ とするとき次式の値を求めよ.

① $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

② $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

3次方程式の解と係数の関係から
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= -\frac{3}{1} = -3 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= \frac{-5}{1} = -5 \\ \alpha\beta\gamma &= -\frac{-9}{1} = 9 \end{cases}$$

① 与式 $= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$$= (-3)^2 - 2 \times (-5) = \mathbf{19}$$

② 与式 $= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$

$$= (-3) \cdot \{19 - (-5)\} + 3 \times 9$$

$$= (-3) \times 24 + 27 = \mathbf{-45}$$

★3元対称式の公式

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$$

2. 次の間に答えよ。(S級1分50秒, A級3分, B級4分40秒, C級6分30秒)

- (1) $(x + \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ を x について展開せよ. つまり α, β, γ については展開する必要はない.

$$\text{与式} = x^3 + (\alpha - \beta - \gamma)x^2 + (-\alpha\beta + \beta\gamma - \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma$$

☆ α のある項の符号だけ (-1) 倍するイメージ.

- (2) $2x^3 - 3x^2 - 6x + 1 = 0$ の3つの解を α, β, γ とするとき次式の値を求めよ.

① $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

② $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$$\text{3次方程式の解と係数の関係から} \quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= \frac{-6}{2} = -3 \\ \alpha\beta\gamma &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

① 与式 $= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times (-3) = \frac{33}{4}$$

② 与式 $= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left\{ \frac{33}{4} - (-3) \right\} + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{45}{4} - \frac{3}{2} = \frac{123}{8}$$