

反射テスト 整式 高次方程式 01

1. 次の方程式を実数の範囲内で解け。(S級3分, A級4分20秒, B級6分, C級8分)

(1) $x^3 = 1$

(2) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$

(3) $x^4 + 4x^3 - 11x - 6 = 0$

2. 次の方程式を実数の範囲内で解け。(S級3分30秒, A級5分, B級7分, C級9分)

(1) $x^3 = \frac{1}{8}$

(2) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

(3) $x^4 - 13x^2 - 14x + 8 = 0$

反射テスト 整式 高次方程式 01 解答解説

1. 次の方程式を実数の範囲内で解け。(S級3分, A級4分20秒, B級6分, C級8分)

★高次方程式 因数定理を応用して割り算していく.

- ① 「整式 = 0」の形に変形し, 方程式の左辺を $f(x)$ とする.
- ② $f(a) = 0$ となる a を探す.
- ③ $f(x)$ を $(x - a)$ で割る.
- ④ ③の商がまだ3次以上ならば, また②に戻って作業する.

(1) $x^3 = 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ 又は } x^2 + x + 1 = 0$$

$x^2 + x + 1 = 0$ の判別式 $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ となるので, $x^2 + x + 1 = 0$ に実数解はない.

$$\therefore x = 1$$

(2) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$

左辺を $f(x)$ とする. (☆定数項が3だから3の約数から探す)

$$f(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 3 = 0 \Rightarrow f(x) = (x - 1)(x^2 - 4x + 3)$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) \text{ であるから, } f(x) = (x - 1)^2(x - 3)$$

$$\therefore f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, 3$$

(3) $x^4 + 4x^3 - 11x - 6 = 0$

左辺を $f(x)$ とする. (☆定数項が-6だから6の約数から探す)

$$f(-2) = (-2)^4 + 4 \cdot (-2)^3 - 11 \cdot (-2) - 6 = 0 \Rightarrow f(x) = (x + 2)(x^3 + 2x^2 - 4x - 3)$$

$g(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ とおく. (☆定数項が-3だから3の約数から探す)

$$g(-3) = (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 - 4 \cdot (-3) - 3 = 0 \Rightarrow g(x) = (x + 3)(x^2 - x - 1)$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 3)(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -3, -2, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2. 次の方程式を実数の範囲内で解け。(S級3分30秒, A級5分, B級7分, C級9分)

$$(1) \quad x^3 = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ 又は } 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

$4x^2 + 2x + 1 = 0$ の判別式 $D/4 = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$ となるので, $4x^2 + 2x + 1 = 0$ に実数解はない.

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$$

左辺を $f(x)$ とする. (☆定数項が12だから12の約数から探す)

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 8 \cdot 2 + 12 = 0 \Rightarrow f(x) = (x - 2)(x^2 + x - 6)$$

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) \text{ であるから, } f(x) = (x + 3)(x - 2)^2$$

$$\therefore f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3, 2$$

$$(3) \quad x^4 - 13x^2 - 14x + 8 = 0$$

左辺を $f(x)$ とする. (☆定数項が8だから8の約数から探す)

$$f(-2) = (-2)^4 - 13 \cdot (-2)^2 - 14 \cdot (-2) + 8 = 0 \Rightarrow f(x) = (x + 2)(x^3 - 2x^2 - 9x + 4)$$

$g(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 4$ とおく. (☆定数項が4だから4の約数から探す)

$$g(4) = 4^3 - 2 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 4 = 0 \Rightarrow g(x) = (x - 4)(x^2 + 2x - 1)$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 4)(x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -2, 4, -1 \pm \sqrt{2}$$