反射テスト　整式　因数分解　01

1.　次の式を因数分解せよ.（ S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分, C 級 5 分 30 秒 ）

$x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

2. 次の式を因数分解せよ.（ S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分, C 級 5 分 30 秒 ）

$x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

反射テスト　整式　因数分解　01　解答解説

1.　次の式を因数分解せよ.（ S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分, C 級 5 分 30 秒 ）
$x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1$

★ 係数の対称性の利用
降べきの順に並べて係数・定数を見ると 1,2,3,3,2,1 となり左右対称. 同じ係数のものでまとめて,

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= x^5+1 + 2x^4+2x + 3x^3+3x^2 && \leftarrow\text{左右から 1 項ずつとって整理.}\\
&= (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1) + 2x(x^3+1) + 3x^2(x+1) && \leftarrow x^{\text{奇数}}+1 \text{ は因数 } (x+1) \text{ をもつ.}\\
&= (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1) + 2x(x+1)(x^2-x+1) + 3x^2(x+1)
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= (x+1)\left\{x^4-x^3+x^2-x+1+2x(x^2-x+1)+3x^2\right\}\\
&= (x+1)(x^4+x^3+2x^2+x+1) && \leftarrow\text{また係数が対称なので因数分解が可能だろう.}\\
&= (x+1)(x^4+2x^2+1+x^3+x)\\
&= (x+1)\left\{(x^2+1)^2+x(x^2+1)\right\}\\
&= \boldsymbol{(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)}
\end{aligned}$$

★因数定理と余り
★ 剰余の定理　x の整式 $f(x)$ を 1 次式 $x-a$ で割ったときの **余りは $f(a)$** である.
★ 因数定理　$f(a)=0$ であれば, $f(x)$ は 因数 $x-a$ で割り切れる.
最初の解法にある「 ★ $x^{\text{奇数}}+1$ は因数 $(x+1)$ をもつ. 」も因数定理で証明できる.

☆別解　$f(x)=x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1$ とおくと,
$f(-1)=(-1)^5+2(-1)^4+3(-1)^3+2(-1)^2+2(-1)+1=0$
であるから, 因数定理より $f(x)$ が 因数 $x+1$ をもつことがわかるから,
$f(x)=(x+1)(x^4+x^3+2x^3+x+1)$

2. 次の式を因数分解せよ.（ S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分, C 級 5 分 30 秒 ）

$x^5+4x^4+5x^3+5x^2+4x+1$

★ 係数の対称性の利用

降べきの順に並べて係数・定数を見ると 1,4,5,5,4,1 となり左右対称. 同じ係数のものでまとめて,

$$\begin{aligned}\text{与式} &= x^5+1 - 4(x^4+x) + 5x^3+5x^2 && \leftarrow\text{左右から 1 項ずつとって整理.}\\ &= (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1) + 4x(x^3+1) + 5x^2(x+1) && \leftarrow x^{\text{奇数}}+1 \text{ は因数 } (x+1) \text{ をもつ.}\\ &= (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1) + 4x(x+1)(x^2-x+1) + 5x^2(x+1)\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (x+1)\left\{x^4-x^3+x^2-x+1+4x(x^2-x+1)+5x^2\right\}\\ &= (x+1)(x^4+3x^3+2x^2+3x+1) && \leftarrow\text{また係数が対称なので因数分解が可能だろう.}\\ &= (x+1)(x^4+2x^2+1+3x^3+3x)\\ &= (x+1)\left\{(x^2+1)^2+3x(x^2+1)\right\}\\ &= \boldsymbol{(x+1)(x^2+1)(x^2+3x+1)}\end{aligned}$$

★因数定理と余り

★ 剰余の定理　x の整式 $f(x)$ を 1 次式 $x-a$ で割ったときの **余りは $\boldsymbol{f(a)}$** である.

★ 因数定理　$f(a)=0$ であれば, $f(x)$ は 因数 $x-a$ で割り切れる.

最初の解法にある「 ★ $x^{\text{奇数}}+1$ は因数 $(x+1)$ をもつ. 」も因数定理で証明できる.

☆別解　$f(x)=x^5+4x^4+5x^3+5x^2+4x+1$ とおくと,

$$f(-1)=(-1)^5+4(-1)^4+5(-1)^3+5(-1)^2+4(-1)+1=0$$

であるから, 因数定理より $f(x)$ が 因数 $x+1$ をもつことがわかるから,

$$f(x)=(x+1)(x^4+3x^3+2x^3+3x+1)$$