

反射テスト 整式 因数定理 複素係数の因数分解 01

1. 因数定理を用いて、次の $f(x)$ を因数分解せよ。ただし係数は複素数の範囲内とする。

(S 級 3 分, A 級 4 分 20 秒, B 級 6 分, C 級 8 分)

(1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

(2) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6$

2. 因数定理を用いて, 次の $f(x)$ を因数分解せよ. ただし係数は複素数の範囲内とする.

(S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 5 分 30 秒, C 級 7 分)

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 27$

(2) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 21x - 54$

反射テスト 整式 因数定理 複素係数の因数分解 01 解答解説

1. 因数定理を用いて、次の $f(x)$ を因数分解せよ。ただし係数は複素数の範囲内とする。

(S 級 3 分, A 級 4 分 20 秒, B 級 6 分, C 級 8 分)

★ 因数定理

x の整式 $f(x)$ に対して、 $f(a) = 0$ を満たす a が存在 する。

⇔ $f(x)$ は $(x - a)$ で割り切れる。

⇔ $f(x) = (x - a)g(x)$ と表せる (ただし $g(x)$ は x の整式)

★ 因数定理を用いての因数分解

① $f(x)$ の x に適当な数を代入して、 $f(x) = 0$ になるものを探す。根性が重要。

② 見つかったらそれを a として、 $f(x)$ を $(x - a)$ で割る。

(1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

☆係数が最高次を除いて全て偶数であるから、偶数を考える。

$$f(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 + 4 \times 2 - 8 = 0$$

★ 因数定理 から、 $f(x)$ は $(x - 2)$ で割り切れる。

$$\therefore f(x) = (x - 2)(x^2 + 4)$$

$$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm 2i$$

$$\therefore f(x) = (x - 2)(x + 2i)(x - 2i)$$

(2) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6$

$$f(1) = 1^4 + 3 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 1 - 6 = 0$$

★ 因数定理 から、 $f(x)$ は $(x - 1)$ で割り切れる。

$$\therefore f(x) = (x - 1)(x^3 + 4x^2 + 7x + 6)$$

☆ $x^3 + 4x^2 + 7x + 6$ の係数が全て正であるから、負の数を考える。

$$f(-1) = (-1)^3 + 4 \times (-1)^2 + 7 \times (-1) + 6 = 2$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 4 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) + 6 = 0$$

★ 因数定理 から、 $f(x)$ は $\{x - (-2)\}$ で割り切れる。

$$\therefore f(x) = (x - 1)(x + 2)(x^2 + 2x + 3)$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 3} = -1 \pm \sqrt{2}i$$

$$\therefore f(x) = (x - 1)(x + 2) \{x - (-1 + \sqrt{2}i)\} \{x - (-1 - \sqrt{2}i)\}$$

2. 因数定理を用いて、次の $f(x)$ を因数分解せよ。ただし係数は複素数の範囲内とする。

(S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 5 分 30 秒, C 級 7 分)

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 27$

☆係数が最高次を除いて全て 3 の倍数, 3 の倍数を考える。

☆係数が全て正であるから, 負の数を考える。

$$f(-3) = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 + 9 \times (-3) + 27 = 0$$

★ 因数定理 から, $f(x)$ は $\{x - (-3)\}$ で割り切れる。

$$\therefore f(x) = (x + 3)(x^2 + 9)$$

$$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9 \Leftrightarrow x = \pm 3i$$

$$\therefore f(x) = (x + 3)(x + 3i)(x - 3i)$$

(2) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 21x - 54$

$$f(1) = 1^4 - 1^3 + 1^2 + 21 \times 1 - 54 = -32$$

$$f(2) = 2^4 - 2^3 + 2^2 + 21 \times 2 - 54 = 0$$

★ 因数定理 から, $f(x)$ は $(x - 2)$ で割り切れる。

$$\therefore f(x) = (x - 2)(x^3 + x^2 + 3x + 27)$$

☆ $x^3 + x^2 + 3x + 27$ の係数が全て正であるから, 負の数を考える。

☆ $x^3 + x^2 + 3x + 27$ で, 1 以外の項 2 つの係数が 3 の倍数であるから, 3 の倍数を考える。

$$f(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 + 3 \times (-3) + 27 = 0$$

★ 因数定理 から, $f(x)$ は $\{x - (-3)\}$ で割り切れる。

$$\therefore f(x) = (x - 2)(x + 3)(x^2 - 2x + 9)$$

$$x^2 - 2x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1^2 - 9} = -1 \pm 2\sqrt{2}i$$

$$\therefore f(x) = (x - 2)(x + 3) \{x - (1 + 2\sqrt{2}i)\} \{x - (1 - 2\sqrt{2}i)\}$$