

反射テスト 三角関数・指数・対数 方程式 01

1. 次の方程式を実数 x について解け。(S級 45 秒, A級 1 分 20 秒, B級 2 分 30 秒, C級 4 分)

(1) $2^{\sin x} = \sqrt{2}$

ただし, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする.

(2) $\cos^2(\log_3 x) = 1$

2. 次の方程式を実数 x について解け. (S 級 45 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分 30 秒, C 級 4 分)

(1) $9^{\cos x} = \frac{1}{3}$
ただし, $0 \leq x < \pi$ とする.

(2) $\tan^2(\log_2 x) = 1$

反射テスト 三角関数・指数・対数 方程式 01 解答解説

1. 次の方程式を実数 x について解け。(S級 45秒, A級 1分20秒, B級 2分30秒, C級 4分)

(1) $2^{\sin x} = \sqrt{2}$

ただし, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする.

両辺について底を 2 とする対数をとると,

$$\log_2 2^{\sin x} = \log_2 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ より, } x = \frac{\pi}{6}$$

(2) $\cos^2(\log_3 x) = 1$

真数条件から, $x > 0$

この条件において,

$$\cos^2(\log_3 x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(\log_3 x) = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = n\pi \quad (\text{ただし } n \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = n\pi \cdot \log_3 3 \quad (\text{ただし } n \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 3^{n\pi} \quad (\text{ただし } n \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow x = 3^{n\pi} \quad (\text{ただし } n \text{ は整数})$$

$n\pi$ は実数であるから, この解は真数条件を満たす.

☆ $n\pi$

この式は, 整数 n に対して,

$$2n\pi \text{ 又は } 2n\pi + \pi$$

という表し方でもよい.

☆ある整数を用いて解を表すことに慣れること.

2. 次の方程式を実数 x について解け。(S 級 45 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分 30 秒, C 級 4 分)

(1) $9^{\cos x} = \frac{1}{3}$

ただし, $0 \leq x < \pi$ とする.

両辺について底を 3 とする対数をとると,

$$\log_3 9^{\cos x} = \log_3 3^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot \log_3 9 = -1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < \pi \text{ より, } x = \frac{2}{3}\pi$$

(2) $\tan^2(\log_2 x) = 1$

真数条件から, $x > 0$

この条件において,

$$\tan^2(\log_2 x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan(\log_2 x) = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = n\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (\text{ただし } n \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \left(n\pi \pm \frac{\pi}{4}\right) \cdot \log_2 2 \quad (\text{ただし } n \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 2^{n\pi \pm \frac{\pi}{4}} \quad (\text{ただし } n \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{n\pi \pm \frac{\pi}{4}} \quad (\text{ただし } n \text{ は整数})$$

$n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ は実数であるから, この解は真数条件を満たす.

☆ $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

この式は, 整数 n に対して,

$$2n\pi + \frac{\pi}{4} \text{ 又は } 2n\pi + \frac{3}{4}\pi \text{ 又は } 2n\pi + \frac{5}{4}\pi \text{ 又は } 2n\pi + \frac{7}{4}\pi$$

という表し方でもよい.