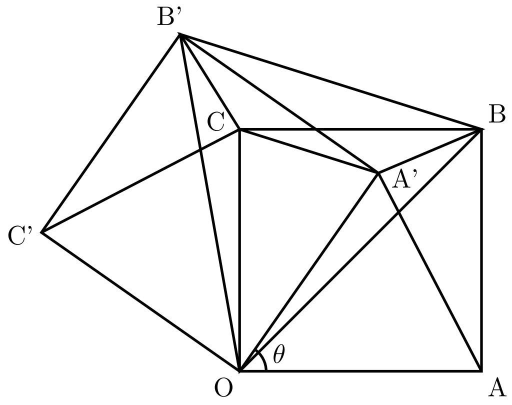
反射テスト　三角比　平面図形　正方形の回転移動と面積　01

1. 　1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を O を中心に θ 回転移動した正方形を $\mathrm{OA'B'C'}$ とする. $45^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ として, 次の問に答えよ.

(S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分 30 秒, B 級 6 分, C 級 9 分)



(1) 　$\triangle \mathrm{OAA'}$ の面積を求めよ.

(2) 　$\triangle \mathrm{OA'C}$ の面積を求めよ.

(3) 　$\triangle \mathrm{OBB'}$ の面積を求めよ.

(4) 　$\triangle \mathrm{OA'B}$ の面積を求めよ.

(5) 　台形 $\mathrm{B'CA'B}$ の面積を求めよ.

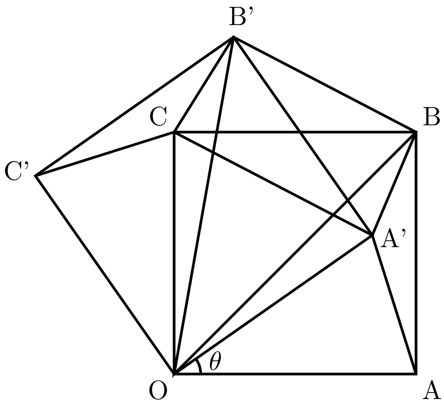
(6) 　台形 $\mathrm{B'CA'B}$ の面積はどの図形の面積と等しいか.

時間外課題　(6) の幾何的証明をしてみよう.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を O を中心に θ 回転移動した正方形を OA′B′C′ とする. $0° \leqq \theta \leqq 45°$ として, 次の問に答えよ.

(S 級 4 分 20 秒, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 14 分)



(1) △OAA′の面積を求めよ.

(2) △OA′C の面積を求めよ.

(3) △OBB′の面積を求めよ.

(4) △OA′B の面積を求めよ.

(5) 台形 B′CA′B の面積を求めよ.

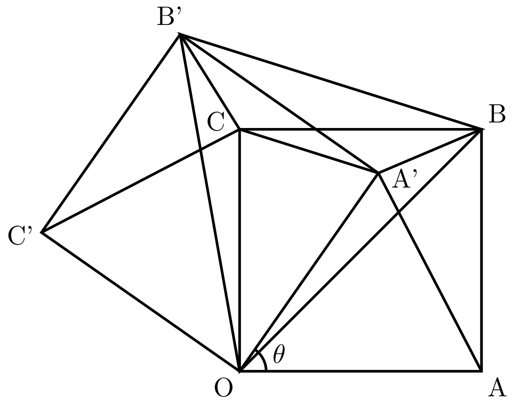
(6) 台形 B′CA′B の面積はどの図形の面積と等しいか.

(7) 台形 B′CA′B が長方形になるときの θ を求めよ.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　三角比　平面図形　正方形の回転移動と面積　01　解答解説

1.　1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を O を中心に θ 回転移動した正方形を $\mathrm{OA'B'C'}$ とする．$45^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ として，次の問に答えよ．
（ S 級 2 分 30 秒，A 級 4 分 30 秒，B 級 6 分，C 級 9 分 ）



(1)　$\triangle\mathrm{OAA'}$ の面積を求めよ．

(2)　$\triangle\mathrm{OA'C}$ の面積を求めよ．

(3)　$\triangle\mathrm{OBB'}$ の面積を求めよ．

(4)　$\triangle\mathrm{OA'B}$ の面積を求めよ．

(5)　台形 $\mathrm{B'CA'B}$ の面積を求めよ．

(6)　台形 $\mathrm{B'CA'B}$ の面積はどの図形の面積と等しいか．

時間外課題　(6) の幾何的証明をしてみよう．

(1)　$\triangle\mathrm{OAA'}$ は，$\mathrm{OA} = \mathrm{OA'} = 1$，それらの挟む角が θ の二等辺三角形．

$$\triangle\mathrm{OAA'} = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin\theta = \boldsymbol{\frac{\sin\theta}{2}}$$

(2)　$\triangle\mathrm{OA'C}$ は，$\mathrm{OA'} = \mathrm{OC} = 1$，それらの挟む角が $(90^\circ - \theta)$ の二等辺三角形．

$$\triangle\mathrm{OA'C} = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin(90^\circ - \theta) = \boldsymbol{\frac{\cos\theta}{2}}$$

(3)　$\mathrm{OB}, \mathrm{OB'}$ は一辺の長さが 1 の正方形の対角線だから，$\sqrt{2}$．

$\mathrm{A} \to \mathrm{A'}$ が θ の回転移動だから，$\mathrm{B} \to \mathrm{B'}$ も θ の回転移動．

$\triangle\mathrm{OBB'}$ は，$\mathrm{OB} = \mathrm{OB'} = \sqrt{2}$，それらの挟む角が θ の二等辺三角形．

$$\triangle\mathrm{OBB'} = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \times \sin\theta = \boldsymbol{\sin\theta}$$

(4)　$\mathrm{OA'} = 1$，$\mathrm{OB} = \sqrt{2}$，それらの挟む角が，$(\theta - 45^\circ)$ の三角形だから，

$$\triangle\mathrm{OA'B} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} \times \sin(\theta - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta\cos 45^\circ - \cos\theta\sin 45^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right) = \boldsymbol{\frac{\sin\theta - \cos\theta}{2}}$$

☆別解　こっちなら数 1A の範囲内で解ける．

$\triangle\mathrm{ABA'} + \triangle\mathrm{OA'C}$ は正方形の面積の半分だから，　$\triangle\mathrm{ABA'} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos\theta}{2}$

また，$\triangle\mathrm{OAB}$ も正方形の半分だから，$\dfrac{1}{2}$．

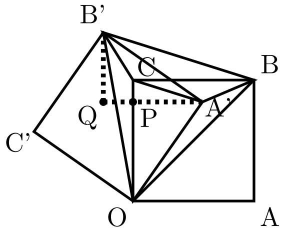
$$\therefore\quad \triangle\mathrm{OA'B} = (\triangle\mathrm{OAA'} + \triangle\mathrm{ABA'}) - \triangle\mathrm{OAB} = \left(\frac{\sin\theta}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cos\theta}{2}\right) - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sin\theta - \cos\theta}{2}}$$

(5)　台形 $\mathrm{B'CA'B} + \triangle\mathrm{OA'C} + \triangle\mathrm{OA'B} + \triangle\mathrm{OCB'} = \triangle\mathrm{OBB'}$

$\Leftrightarrow$　台形 $\mathrm{B'CA'B} = \triangle\mathrm{OBB'} - \triangle\mathrm{OA'C} - 2\triangle\mathrm{OA'B}$　　$\leftarrow \because\ \triangle\mathrm{OCB'} \equiv \triangle\mathrm{OA'B}$

$$= \sin\theta - \frac{\cos\theta}{2} - 2 \times \left(\frac{\sin\theta - \cos\theta}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{\cos\theta}{2}}$$

(6)　(2) と (5) の結果から，台形 $\mathrm{B'CA'B} = \boldsymbol{\triangle\mathrm{OA'C}}$



☆ (6) の幾何的証明. ☆補助線 (★合同を作る)

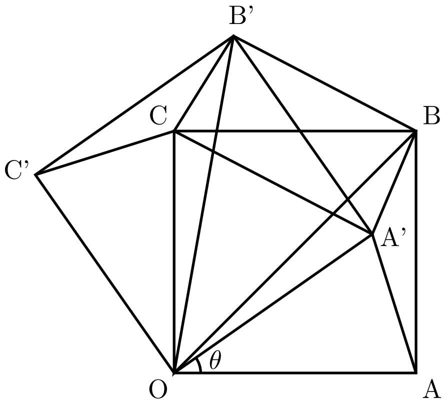
$\mathrm{A'}$ から OC に垂線下ろす (足を P とする). $\mathrm{B'}$ から BC にも垂線を下ろす.

2 つの補助線の延長線の交点を Q とすると，$\triangle\mathrm{OA'P} \equiv \triangle\mathrm{A'B'Q} \Rightarrow \mathrm{A'P} = \mathrm{B'Q}$

$$\triangle\mathrm{OA'C} = \frac{\mathrm{OC} \times \mathrm{A'P}}{2} = \frac{\mathrm{BC} \times \mathrm{B'Q'}}{2} = \triangle\mathrm{B'CB} + \triangle\mathrm{A'BC} = \text{台形 }\mathrm{B'CA'B}$$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2.　1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を O を中心に θ 回転移動した正方形を $\mathrm{OA'B'C'}$ とする．$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ として，次の問に答えよ．
（ S 級 4 分 20 秒，A 級 7 分，B 級 10 分，C 級 14 分 ）



(1)　$\triangle\mathrm{OAA'}$ の面積を求めよ．

(2)　$\triangle\mathrm{OA'C}$ の面積を求めよ．

(3)　$\triangle\mathrm{OBB'}$ の面積を求めよ．

(4)　$\triangle\mathrm{OA'B}$ の面積を求めよ．

(5)　台形 $\mathrm{B'CA'B}$ の面積を求めよ．

(6)　台形 $\mathrm{B'CA'B}$ の面積はどの図形の面積と等しいか．

(7)　台形 $\mathrm{B'CA'B}$ が長方形になるときの θ を求めよ．

(1)　$\triangle\mathrm{OAA'}$ は，$\mathrm{OA}=\mathrm{OA'}=1$，それらの挟む角が θ の二等辺三角形．

$$\triangle\mathrm{OAA'}=\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\theta=\boldsymbol{\frac{\sin\theta}{2}}$$

(2)　$\triangle\mathrm{OA'C}$ は，$\mathrm{OA'}=\mathrm{OC}=1$，それらの挟む角が $(90^\circ-\theta)$ の二等辺三角形．

$$\triangle\mathrm{OA'C}=\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin(90^\circ-\theta)=\boldsymbol{\frac{\cos\theta}{2}}$$

(3)　$\mathrm{OB},\mathrm{OB'}$ は一辺の長さが 1 の正方形の対角線だから，$\sqrt{2}$．
$\mathrm{A}\to\mathrm{A'}$ が θ の回転移動だから，$\mathrm{B}\to\mathrm{B'}$ も θ の回転移動．
$\triangle\mathrm{OBB'}$ は，$\mathrm{OB}=\mathrm{OB'}=\sqrt{2}$，それらの挟む角が θ の二等辺三角形．

$$\triangle\mathrm{OBB'}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\sin\theta=\boldsymbol{\sin\theta}$$

(4)　$\mathrm{OA'}=1$，$\mathrm{OB}=\sqrt{2}$，それらの挟む角が，$(45^\circ-\theta)$ の三角形だから，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OA'B}&=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2}\times\sin(45^\circ-\theta)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 45^\circ\cos\theta-\cos 45^\circ\sin\theta)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)=\boldsymbol{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{2}}\end{aligned}$$

☆別解　こっちなら数 1A の範囲内で解ける．

$\triangle\mathrm{ABA'}+\triangle\mathrm{OA'C}$ は正方形の面積の半分だから，　$\triangle\mathrm{ABA'}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos\theta}{2}$

また，$\triangle\mathrm{OAB}$ も正方形の半分だから，$\dfrac{1}{2}$．

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{OA'B}=\triangle\mathrm{OAB}-(\triangle\mathrm{OAA'}+\triangle\mathrm{ABA'})=\frac{1}{2}-\left(\frac{\sin\theta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\cos\theta}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{2}}$$

(5)　台形 $\mathrm{B'CA'B}+\triangle\mathrm{OA'C}=\triangle\mathrm{OA'B}+\triangle\mathrm{OBB'}+\triangle\mathrm{OCB'}$

$\Leftrightarrow$　台形 $\mathrm{B'CA'B}=2\triangle\mathrm{OA'B}+\triangle\mathrm{OBB'}-\triangle\mathrm{OA'C}$　　$\leftarrow\ \because\ \triangle\mathrm{OCB'}\equiv\triangle\mathrm{OA'B}$

$$=2\times\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{2}\right)+\sin\theta-\frac{\cos\theta}{2}=\boldsymbol{\frac{\cos\theta}{2}}$$

(6)　(2) と (5) の結果から，台形 $\mathrm{B'CA'B}=\boldsymbol{\triangle\mathrm{OA'C}}$

☆前ページの結果と合わせると，$0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ の回転移動において，正方形の大きさによらず以下が成立する．

$\triangle\mathrm{OBB'}=\triangle\mathrm{OAA'}+\triangle\mathrm{OCC'}$　かつ　台形 $\mathrm{B'CA'B}=\triangle\mathrm{OA'C}$

(7)　台形 $\mathrm{B'CA'B}$ は対称性から等脚台形だから，$\mathrm{B'B}=\mathrm{CA'}$ になればよい．★ **余弦定理** から，

$$\begin{aligned}&\mathrm{B'B}^2=\mathrm{CA'}^2\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{OA'}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OA'}\cdot\mathrm{OC}\cos(90^\circ-\theta)=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OB'}^2-2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OB'}\cos\theta\\\Leftrightarrow\quad&1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(90^\circ-\theta)=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\theta\\\Leftrightarrow\quad&2-2\sin\theta=4-4\cos\theta\quad\Leftrightarrow\quad -\sin\theta+2\cos\theta=1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}\quad\cdots①\end{aligned}$$

★ **三角関数の合成**　$1:2:\sqrt{5}$ の直角三角形の大きい方の鋭角を α とすれば，$0^\circ<\theta<45^\circ$ より，

$$①\quad\Leftrightarrow\quad\sin(\theta-\alpha)=\sin\{-(90^\circ-\alpha)\}\quad\Leftrightarrow\quad\theta-\alpha=-90^\circ+\alpha\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{\theta=2\alpha-90^\circ}$$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）