

反射テスト 三角関数 式変形のまとめ 01

1. 次の問に答えよ. (*S* 級 2 分 40 秒, *A* 級 4 分 30 秒, *B* 級 6 分 30 秒, *C* 級 9 分)

(1) 次の式が成り立つことを示せ.

$$\cos \alpha \cdot \cos (60^\circ - \alpha) \cdot \cos (60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

(2) (1) を用いて, 次の式を簡単にせよ.

$$\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$$

2. 次の問に答えよ. (*S* 級 3 分, *A* 級 5 分, *B* 級 7 分, *C* 級 10 分)

(1) 次の式が成り立つことを示せ.

$$\sin \alpha \cdot \sin (60^\circ - \alpha) \cdot \sin (60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$$

(2) (1) を用いて, 次の式を簡単にせよ.

$$\cos 10^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ$$

反射テスト 三角関数 式変形のまとめ 01 解答解説

1. 次の間に答えよ。(S級2分40秒, A級4分30秒, B級6分30秒, C級9分)

(1) 次の式が成り立つことを示せ.

$$\cos \alpha \cdot \cos (60^\circ - \alpha) \cdot \cos (60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

$$\text{左辺} = \cos \alpha \cdot \cos (60^\circ + \alpha) \cdot \cos (60^\circ - \alpha)$$

$$= \cos \alpha \times \frac{1}{2} [\cos \{(60^\circ + \alpha) + (60^\circ - \alpha)\} + \cos \{(60^\circ + \alpha) - (60^\circ - \alpha)\}] \quad \because \star \text{積和の公式}$$

$$= \frac{1}{2} \cos \alpha (\cos 120^\circ + \cos 2\alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \cos \alpha \left(-\frac{1}{2} + 2 \cos^2 \alpha - 1 \right) \quad \because \star \text{倍角公式}$$

$$= \frac{1}{2} \cos \alpha \left(2 \cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \right)$$

$$= \cos^3 \alpha - \frac{3}{4} \cos \alpha \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{右辺} = \frac{1}{4} (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) \quad \because \star 3 \text{ 倍角の公式}$$

$$= \cos^3 \alpha - \frac{3}{4} \cos \alpha \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より 左辺 = 右辺

☆別解 積和の公式に自信がなければ, 加法定理でゴリゴリした方が早いし, 確実だろう.

$$\text{左辺} = \cos \alpha (\cos 60^\circ \cos \alpha + \sin 60^\circ \sin \alpha) (\cos 60^\circ \cos \alpha - \sin 60^\circ \sin \alpha)$$

$$= \cos \alpha \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right)$$

$$= \cos \alpha \left(\frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \right)$$

$$= \cos \alpha \left\{ \frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} (1 - \cos^2 \alpha) \right\}$$

(2) (1) を用いて, 次の式を簡単にせよ.

$$\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$$

$$\text{与式} = \cos 10^\circ \cdot \cos (60 - 10)^\circ \cdot \cos (60 + 10)^\circ$$

$$= \frac{1}{4} \cos (3 \times 10)^\circ \quad \because (1) \text{ に } \alpha = 10^\circ \text{ を代入}$$

$$= \frac{1}{4} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

2. 次の問に答えよ。(S級3分, A級5分, B級7分, C級10分)

(1) 次の式が成り立つことを示せ.

$$\sin \alpha \cdot \sin (60^\circ - \alpha) \cdot \sin (60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$$

$$\text{左辺} = \sin \alpha \cdot \sin (60^\circ + \alpha) \cdot \sin (60^\circ - \alpha)$$

$$= \sin \alpha \times \left[-\frac{1}{2} [\cos \{(60^\circ + \alpha) + (60^\circ - \alpha)\} - \cos \{(60^\circ + \alpha) - (60^\circ - \alpha)\}] \right] \quad \because \star \text{積和の公式}$$

$$= -\frac{1}{2} \sin \alpha (\cos 120^\circ - \cos 2\alpha)$$

$$= -\frac{1}{2} \sin \alpha \left\{ -\frac{1}{2} - (1 - 2 \sin^2 \alpha) \right\} \quad \because \star \text{倍角公式}$$

$$= -\frac{1}{2} \sin \alpha \left(2 \sin^2 \alpha - \frac{3}{2} \right)$$

$$= -\sin^3 \alpha + \frac{3}{4} \sin \alpha \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{右辺} = \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) \quad \because \star 3 \text{ 倍角の公式}$$

$$= -\sin^3 \alpha + \frac{3}{4} \sin \alpha \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より 左辺 = 右辺

☆別解 積和の公式に自信がなければ, 加法定理でゴリゴリした方が早いし, 確実だろう.

$$\text{左辺} = \sin \alpha (\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha) (\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha)$$

$$= \sin \alpha \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right)$$

$$= \sin \alpha \left(\frac{3}{4} \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \right)$$

$$= \sin \alpha \left\{ \frac{3}{4} (1 - \sin^2 \alpha) - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \right\}$$

(2) (1) を用いて, 次の式を簡単にせよ.

$$\cos 10^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ$$

$$\text{与式} = \sin 80^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \quad \because \star \cos \theta = \sin (90 - \theta)$$

$$= \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$$

$$= \sin 20^\circ \cdot \sin (60 - 20)^\circ \cdot \sin (60 + 20)^\circ$$

$$= \frac{1}{4} \sin (3 \times 20)^\circ \quad \because (1) \text{ に } \alpha = 20^\circ \text{ を代入}$$

$$= \frac{1}{4} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$