

反射テスト 三角関数 式変形 次数下げ 01

1. 次の式を $\sin$, $\cos$ の 1 次式で表せ. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) $\cos^2 \theta$

(2) $\sin^2 \theta$

(3) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

2. 次の式を $\sin$, $\cos$ の 1 次式で表せ. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\cos^2 \theta$

(3) $2 \sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

反射テスト 三角関数 式変形 次数下げ 01 解答解説

1. 次の式を $\sin$, $\cos$ の 1 次式で表せ. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

★ 三角関数の次数下げのメリットは積分しやすいこと.

$$(1) \quad \cos^2 \theta$$

$$= \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

★ 半角公式

$$(2) \quad \sin^2 \theta$$

$$= \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

★ 半角公式

$$(3) \quad \sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

★ 三倍角の公式

$$\begin{cases} \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \\ \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \end{cases}$$

$$\text{これらから, } \sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4}, \quad \cos^3 \theta = \frac{3 \cos \theta + \cos 3\theta}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4} + \frac{3 \cos \theta + \cos 3\theta}{4} \\ &= \frac{3}{4} \sin \theta + \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta \end{aligned}$$

☆別解

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (\sin \theta + \cos \theta) (\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \\ &= \sin \theta + \cos \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \cos \theta \\ &= \sin \theta + \cos \theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\sin 3\theta + \sin \theta) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (\cos 3\theta - \cos \theta) \\ &= \sin \theta + \cos \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta - \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta - \frac{1}{4} \cos \theta \\ &= -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta + \frac{3}{4} \cos \theta \end{aligned}$$

2. 次の式を $\sin$, $\cos$ の 1 次式で表せ. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

★ 三角関数の次数下げのメリットは積分しやすいこと.

$$(1) \quad \sin \theta \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$(2) \quad \cos^2 \theta$$

$$= \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

★ 半角公式

$$(3) \quad 2 \sin^3 \theta - \cos^3 \theta$$

★ 三倍角の公式

$$\begin{cases} \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \\ \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \end{cases}$$

$$\text{これらから, } \sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4}, \quad \cos^3 \theta = \frac{3 \cos \theta + \cos 3\theta}{4}$$

$$\text{与式} = 2 \cdot \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4} - \frac{3 \cos \theta + \cos 3\theta}{4}$$

$$= \frac{3}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 3\theta - \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta$$

$$= \frac{3}{2} \sin \theta - \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin 3\theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta$$