

反射テスト 三角関数 三角形との関係 01

1. 直角三角形ではない $\triangle ABC$ において, 次の式が成り立つことを示せ. (S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

2. $\triangle ABC$ において、次の式が成り立つことを示せ。(S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 8 分, C 級 12 分)

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

反射テスト 三角関数 三角形との関係 01 解答解説

1. 直角三角形ではない $\triangle ABC$ において、次の式が成り立つことを示せ。(S級1分30秒, A級3分, B級5分, C級7分)

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

証明

ABC は三角形であるから $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow C = 180^\circ - (A + B) \dots \textcircled{1}$

$$\text{左辺} = \tan A + \tan B + \tan \{180^\circ - (A + B)\} \quad \because \textcircled{1}$$

$$= \tan A + \tan B - \tan (A + B)$$

$$= \tan A + \tan B - \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad \because \tan \text{の加法定理}$$

$$= \frac{(\tan A + \tan B)(1 - \tan A \tan B) - \tan A - \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$= \tan A \tan B \times \left(-\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \right)$$

$$= \tan A \tan B \times \{-\tan (A + B)\} \quad \because \tan \text{の加法定理の逆}$$

$$= \tan A \tan B \times \tan \{180^\circ - (A + B)\}$$

$$= \tan A \tan B \tan C$$

2. $\triangle ABC$ において、次の式が成り立つことを示せ。(S級3分, A級5分, B級8分, C級12分)

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

証明

ABC は三角形であるから $2A + 2B + 2C = 360^\circ \Leftrightarrow 2C = 360^\circ - (2A + 2B) \dots \textcircled{1}$

左辺 = $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2\{360^\circ - (2A + 2B)\} \quad \because \textcircled{1}$

$$= \sin 2A + \sin 2B - \sin (2A + 2B)$$

$$= \sin 2A + \sin 2B - (\sin 2A \cos 2B + \cos 2A \sin 2B) \quad \because \sin \text{の加法定理}$$

$$= \sin 2A (1 - \cos 2B) + \sin 2B (1 - \cos 2A) \quad \text{それぞれ因数分解}$$

$$= \sin 2A \{1 - (1 - 2 \sin^2 B)\} + \sin 2B \{1 - (1 - 2 \sin^2 A)\} \quad \because \text{倍角公式}$$

$$= 2 \sin 2A \sin^2 B + 2 \sin 2B \sin^2 A$$

$$= 4 \sin A \cos A \sin^2 B + 4 \sin B \cos B \sin^2 A$$

$$= 4 \sin A \sin B (\cos A \sin B + \cos B \sin A) \quad \because \text{因数分解}$$

$$= 4 \sin A \sin B (\sin A \cos B + \cos A \sin B)$$

$$= 4 \sin A \sin B \sin (A + B) \quad \because \sin \text{の加法定理の逆}$$

$$= 4 \sin A \sin B \sin \{180^\circ - (A + B)\}$$

$$= 4 \sin A \sin B \sin C$$