

反射テスト 三角関数 合成 01

1. 次の式を合成して, \sin の単項式で表せ. 角は 360 度法を用いること.

(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 3 分 40 秒, C 級 5 分)

(1) $\sin x + \cos x$

(2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x$

(3) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{6}\cos x$

(4) $-\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

2. 次の式を合成して, \sin の単項式で表せ. 角は 360 度法を用いること.

(S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 4 分, C 級 5 分 30 秒)

(1) $\sin x - \cos x$

(2) $\frac{1}{\sqrt{3}} \sin x + \cos x$

(3) $-\sqrt{5} \sin x - \sqrt{15} \cos x$

(4) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$

反射テスト 三角関数 合成 01 解答解説

1. 次の式を合成して, \sin の単項式で表せ. 角は 360 度法を用いること.

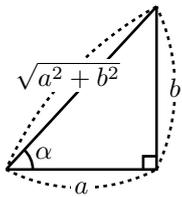
(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 3 分 40 秒, C 級 5 分)

★ 三角関数の合成 (加法定理の逆)

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) \quad \text{ただし } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

証明概略 左図のような三角形を考え, 加法定理 $\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x = \sin(x + \alpha)$ を用いる

☆合成後, $x = 0^\circ$ を代入して確かめる癖をつけるとよい.



(1) $\sin x + \cos x$

(2) $\sqrt{3} \sin x + \cos x$

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

与式 = $\sqrt{2} \sin(x + 45^\circ)$

☆頻出. 覚えるべし.

$$\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

与式 = $2 \sin(x + 30^\circ)$

(3) $\sqrt{2} \sin x - \sqrt{6} \cos x$

(4) $-\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$

$$\sqrt{\sqrt{2}^2 + (-\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \alpha = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -60^\circ$$

与式 = $2\sqrt{2} \sin(x - 60^\circ)$

☆別解 $\alpha = 300^\circ$ と考えてもよい.

$$2\sqrt{2} \sin(x + 300^\circ)$$

$$= -\left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

与式 = $-\sin(x + 60^\circ)$

☆別解 $\sin(x + 240^\circ)$

2. 次の式を合成して、 \sin の単項式で表せ. 角は 360 度法を用いること.

(S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 4 分, C 級 5 分 30 秒)

(1) $\sin x - \cos x$

$$\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -45^\circ$$

$$\text{与式} = \sqrt{2} \sin(x - 45^\circ)$$

(2) $\frac{1}{\sqrt{3}} \sin x + \cos x$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sin x + \sqrt{3} \cos x)$$

$$\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(x + 60^\circ) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(x + 60^\circ) \end{aligned}$$

(3) $-\sqrt{5} \sin x - \sqrt{15} \cos x$

$$= -\sqrt{5}(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$$

$$\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= -\sqrt{5} \cdot 2 \sin(x + 60^\circ) \\ &= -2\sqrt{5} \sin(x + 60^\circ) \end{aligned}$$

$$\star \text{別解} \quad 2\sqrt{5} \sin(x + 240^\circ)$$

(4) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$

$$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x\right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -30^\circ$$

$$\text{与式} = -\sin(x - 30^\circ)$$

$$\star \text{別解} \quad \sin(x + 150^\circ)$$