反射テスト　三角関数　和積公式・積和公式の証明と利用　01

1.　次の問に答えよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分 30 秒, C 級 7 分 ）

(1)　加法定理 $\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cdots① \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & \cdots② \end{cases}$

を用いて, 積の公式 $\sin\alpha\cos\beta$ を求めよ.

(2)　$\sin 2x + \sin 3x = 0$ を $0 \leqq x < 2\pi$ について解け.

2. 次の問に答えよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分 30 秒, C 級 7 分 ）

(1) 加法定理 $\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \cdots① \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & \cdots② \end{cases}$

を用いて, 積の公式 $\sin\alpha\sin\beta$ を求めよ.

(2) $\cos 5x + \cos 3x = 0$ を $0 \leqq x < \pi$ について解け.

反射テスト　三角関数　和積公式・積和公式の証明と利用　01　解答解説

1.　次の問に答えよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分 30 秒, C 級 7 分 ）

★ 積和公式 (積→和差の公式)

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

新居こす, 2 分で, 新都心

(2 分 = 2 分割 = $\frac{1}{2}$) (都 = と = 「＋」)

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

ゴシゴシ, 半分, こすってブラシ壊れる

(ブラシ = プラス)

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

シシマイ, 半分, こんまい子

☆ $\cos\alpha\sin\beta$ については, $\sin\alpha\cos\beta$ の公式を用いればよい.
☆ $3C$ の積分で使うことがある.

★ 和積公式 (和差→積の公式)

$$\begin{cases} \sin A+\sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \sin A-\sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A+\cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A-\cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} \end{cases}$$

☆積の公式で, $\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=B$ とおけば導出可.
☆問題 1(2) のように方程式と相性がいい.

(1)　加法定理 $\begin{cases} \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cdots① \\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta & \cdots② \end{cases}$

を用いて, 積の公式 $\sin\alpha\cos\beta$ を求めよ.

①＋② より,

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

☆この導出方法を覚えておけば, 積の公式を忘れない.
☆$\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=B$ $\Leftrightarrow$ $\alpha=\dfrac{A+B}{2}$, $\beta=\dfrac{A-B}{2}$
この公式にこの α,β を代入すれば, 和積公式を導ける.

(2)　$\sin 2x+\sin 3x=0$ を $0\leqq x<2\pi$ について解け.

★方程式は因数分解

$$\sin 3x+\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin\frac{3x+2x}{2}\cos\frac{3x-2x}{2}=0 \qquad \text{←★左辺に和積公式を用いた}$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin\frac{5x}{2}=0 \text{ 又は } \cos\frac{x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{5x}{2}=m\pi \text{ 又は } \frac{x}{2}=2n\pi\pm\frac{\pi}{2} \qquad (m,n\text{ は整数})$$

$0\leqq x<2\pi$ より,

$$\frac{5x}{2}=m\pi \quad\Rightarrow\quad x=0,\ \frac{2}{5}\pi,\ \frac{4}{5}\pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{8}{5}\pi$$

$$\frac{x}{2}=2n\pi\pm\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad x=\pi$$

答え　$\boldsymbol{x=0,\ \frac{2}{5}\pi,\ \frac{4}{5}\pi,\ \pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{8}{5}\pi}$

2. 次の問に答えよ.（ S 級 2 分，A 級 3 分 30 秒，B 級 5 分 30 秒，C 級 7 分 ）

(1) 加法定理 $\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \cdots① \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & \cdots② \end{cases}$

を用いて，積の公式 $\sin\alpha\sin\beta$ を求めよ.

① − ② より，

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

$\Leftrightarrow \quad \sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$

(2) $\cos 5x + \cos 3x = 0$ を $0 \leqq x < \pi$ について解け.

★方程式は因数分解

$\cos 5x + \cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos\dfrac{5x+3x}{2}\cos\dfrac{5x-3x}{2} = 0$ ←★左辺に和積の公式を用いた

$\Leftrightarrow \quad \cos 4x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos 4x = 0$ 又は $\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$ 又は $x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$ （m, n は整数）

$0 \leqq x < 2\pi$ より，

$4x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3}{8}\pi, \dfrac{5}{8}\pi, \dfrac{7}{8}\pi$

$x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$

答え $\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3}{8}\pi, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5}{8}\pi, \dfrac{7}{8}\pi}$