反射テスト　三角関数　正接の加法定理と直線の傾き　01

1.　次の 2 つの直線が作る角のうち小さい方をラジアンで求めよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分 ）

(1)　$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + 3 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} y = -x \\ y = (2 + \sqrt{3})x - 5 \end{cases}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の 2 つの直線が作る角のうち小さい方をラジアンで求めよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分 ）

(1) $\begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ y = -(3+2\sqrt{2})x + 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y = (2+\sqrt{3})x \\ y = x - 1 \end{cases}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　三角関数　正接の加法定理と直線の傾き　01　解答解説

1.　次の 2 つの直線が作る角のうち小さい方をラジアンで求めよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分 ）

★ 直線の傾きと正接

xy 座標平面上の直線 $y = ax + b$ が x 軸の正の向きと作る角を θ とすると，　$a = \tan\theta$

★ 2 直線 $\begin{cases} y = x\tan\alpha + k_1 \\ y = x\tan\beta + k_2 \end{cases}$ が作る角のうち小さい方を θ とすると，$\theta = |(\beta - \alpha)|$　ただし $-\frac{\pi}{2} < \beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$

★ 正接の加法定理　$\boldsymbol{\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}}$　（ ＋の語呂合わせ　ダンプラダン，1まいダンダン ）

(1)　$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + 3 & \cdots ① \\ y = 3x - 1 & \cdots ② \end{cases}$

① と x 軸の正の方向作る角を α とすると，$\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$

② と x 軸の正の方向作る角を β とすると，$\tan\beta = 3$

$$\begin{aligned} \tan(\beta - \alpha) &= \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \times 3} \\ &= \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1 \end{aligned}$$

よって，作る角は　$\left|\dfrac{\pi}{4}\right| = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

(2)　$\begin{cases} y = -x & \cdots ① \\ y = (2 + \sqrt{3})x - 5 & \cdots ② \end{cases}$

① と x 軸の正の方向作る角を α とすると，$\tan\alpha = -1$

② と x 軸の正の方向作る角を β とすると，$\tan\beta = 2 + \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \tan(\beta - \alpha) &= \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3}) - (-1)}{1 + \left(2 + \sqrt{3}\right) \times (-1)} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{-1(1 + \sqrt{3})} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

よって，作る角は　$\left|-\dfrac{\pi}{3}\right| = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の 2 つの直線が作る角のうち小さい方をラジアンで求めよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分 ）

(1) $\begin{cases} y = \sqrt{2}x & \cdots ① \\ y = -(3+2\sqrt{2})x + 2 & \cdots ② \end{cases}$

① と x 軸の正の方向作る角を α とすると, $\tan\alpha = \sqrt{2}$

② と x 軸の正の方向作る角を β とすると, $\tan\beta = -(3+2\sqrt{2})$

$$\begin{aligned} \tan(\beta-\alpha) &= \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} \\ &= \frac{-(3+2\sqrt{2})-\sqrt{2}}{1+\left\{-\left(3+2\sqrt{2}\right)\right\}\times\sqrt{2}} \\ &= \frac{-3-3\sqrt{2}}{1-3\sqrt{2}-4} = \frac{-3(1+\sqrt{2})}{-3(1+\sqrt{2})} = 1 \end{aligned}$$

よって, 作る角は $\left|\frac{\pi}{4}\right| = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

(2) $\begin{cases} y = (2+\sqrt{3})x & \cdots ① \\ y = x - 1 & \cdots ② \end{cases}$

① と x 軸の正の方向作る角を α とすると, $\tan\alpha = 2+\sqrt{3}$

② と x 軸の正の方向作る角を β とすると, $\tan\beta = 1$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{(2+\sqrt{3})-1}{1+\left(2+\sqrt{3}\right)\times 1} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

よって, 作る角は $\left|\frac{\pi}{6}\right| = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

☆ $\beta-\alpha$ について考えた場合 $\tan(\beta-\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる.

この場合 $\left|-\frac{\pi}{6}\right| = \frac{\pi}{6}$ と考えればよい.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）