

## 反射テスト 三角関数 周期 01

1. 次の  $x$  の関数はいずれも周期をもつ. 正の最小周期を求めよ. (  $S$  級 30 秒,  $A$  級 1 分,  $B$  級 2 分,  $C$  級 3 分 )

(1)  $y = \sin 3x$

(2)  $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(3)  $y = \sin\left(\frac{x + \pi}{6}\right)$

(4)  $y = \sin x \cos x$

2. 次の  $x$  の関数はいずれも周期をもつ. 正の最小周期を求めよ. (  $S$  級 36 秒,  $A$  級 1 分,  $B$  級 2 分,  $C$  級 3 分 )

(1)  $y = \tan 6x$

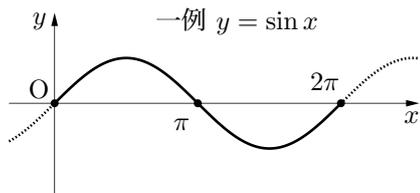
(2)  $y = \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$

(3)  $y = \tan\left\{\frac{4}{3}(x + \pi)\right\}$

(4)  $y = \frac{1}{3}\cos^2 x - \frac{1}{3}\sin^2 x$

# 反射テスト 三角関数 周期 01 解答解説

1. 次の  $x$  の関数はいずれも周期をもつ. 正の最小周期を求めよ. ( S 級 30 秒, A 級 1 分, B 級 2 分, C 級 3 分 )



## ★ 三角関数の正の最小周期

- ①  $y = \sin x$  正の最小周期  $2\pi$
- ②  $y = \cos x$  正の最小周期  $2\pi$
- ③  $y = \tan x$  正の最小周期  $\pi$

## ★ 周期関数の定義

関数  $f(x)$  が周期  $\omega$  をもつ  $\Leftrightarrow$  あらゆる  $x$  について,  $f(x) = f(x + \omega)$

以上から, 周期  $\omega$  をもつならば,  $f(x + 2\omega) = f(x + \omega) = f(x)$  というように周期  $2\omega$  をもつ.  
逆に周期  $2\omega$  をもつからといって,  $\omega$  も周期かどうかは調べてみるまでわからない.

(1)  $y = \sin 3x$

$$3x = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\pi$$

正の最小周期は  $\frac{2}{3}\pi$

☆厳密に考えると, あらゆる  $x$  について,

$$\sin 2x = \sin 2(x + \omega)$$

$$\Leftrightarrow \sin 2(x + \omega) - \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{2(2x + \omega)}{2} \sin \frac{2\omega}{2} = 0 \quad \leftarrow \text{☆和積公式}$$

これがあらゆる  $x$  について成り立つから,

$$\sin \frac{2\omega}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$$

(2)  $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

これは, 平行移動して,  $y = \tan x$  と周期が同じだから,

正の最小周期は  $\pi$

☆単に平行移動しても周期は変わらない.

(3)  $y = \sin\left(\frac{x + \pi}{6}\right)$

$$\frac{x}{6} = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 12\pi$$

正の最小周期は  $12\pi$

(4)  $y = \sin x \cos x$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \sin 2x$$

よって  $2x = 2\pi \Leftrightarrow x = \pi$

正の最小周期は  $\pi$

2. 次の  $x$  の関数はいずれも周期をもつ. 正の最小周期を求めよ. (  $S$  級 36 秒,  $A$  級 1 分,  $B$  級 2 分,  $C$  級 3 分 )

(1)  $y = \tan 6x$

$$6x = \pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

正の最小周期は  $\frac{\pi}{6}$

(2)  $y = \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$

正の最小周期は  $2\pi$

☆単に平行移動しても周期は変わらない.

(3)  $y = \tan\left\{\frac{4}{3}(x + \pi)\right\}$

$$\frac{4}{3}x = \pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}\pi$$

正の最小周期は  $\frac{3}{4}\pi$

(4)  $y = \frac{1}{3}\cos^2 x - \frac{1}{3}\sin^2 x$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}\cos 2x$$

$$\text{よって } 2x = 2\pi \Leftrightarrow x = \pi$$

正の最小周期は  $\pi$