

反射テスト 三角関数 方程式 一般解 01

1. x についての一般解を求めよ. (S 級 55 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

(1) $\cos x = \frac{1}{2}$

(2) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

(3) $\tan \frac{x}{6} = 1$

2. x についての一般解を求めよ. (S 級 1 分 05 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 20 秒, C 級 3 分 30 秒)

$$(1) \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2) \quad \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$(3) \quad \sin \frac{2}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

反射テスト 三角関数 方程式 一般解 01 解答解説

1. x についての一般解を求めよ. (S 級 55 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

★ 一般解と特殊解

特殊解 … ある限定された条件下での解.

一般解 … 全ての解. つまり, 全ての解を表す式でもよい.

$$(1) \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ についての特殊解は, $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

よって一般解は, $x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}, 2n\pi + \frac{5}{3}\pi$ (n は整数)

★ $\sin x, \cos x$ の三角方程式では, $0 \leq x < 2\pi$ の特殊解に対して,
一般解 = $2n\pi$ + 特殊解 (n は整数)

☆別解

$$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (n \text{ は整数})$$

こちらで書けるのなら, 申し分ない.

$$(2) \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow x = n\pi + \frac{\pi}{3} \quad (n \text{ は整数})$$

★ $\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = n\pi$ (n は整数)

☆別解

$0 \leq x - \frac{\pi}{3} < 2\pi$ についての特殊解は, $x - \frac{\pi}{3} = 0, \pi$

一般解 = $2n\pi$ + 特殊解 を用いて, $x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi + 0, 2n\pi + \pi$

$$\therefore x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}, 2n\pi + \frac{4}{3}\pi$$

☆これをもっと簡単な形で言えば, 上の答え (太字) になる.

☆別解において, $x - \frac{\pi}{3} = 0, \pi$ から, $x = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$

としてから, $2n\pi$ を加えると上の解答にならないので注意.

理解が難しい方は, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ を正答, 誤答それぞれに代入してみるとよい.

$$(3) \quad \tan \frac{x}{6} = 1$$

$0 \leq \frac{x}{6} < 2\pi$ についての特殊解は, $\frac{x}{6} = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$

よって一般解は,

$$\frac{x}{6} = n\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 6n\pi + \frac{3}{2}\pi \quad (n \text{ は整数})$$

★ $\tan x$ の三角方程式では, $0 \leq x < \pi$ の特殊解に対して,
一般解 = $n\pi$ + 特殊解 (n は整数)

☆この問題では, $\frac{x}{6}$ について解くのがポイント.

2. x についての一般解を求めよ. (S 級 1 分 05 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 20 秒, C 級 3 分 30 秒)

$$(1) \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leq x < 2\pi$ についての特殊解は, $x = \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$

よって一般解は, $x = 2n\pi + \frac{3}{4}\pi, 2n\pi + \frac{5}{4}\pi$ (n は整数)

☆別解

$$x = 2n\pi \pm \frac{3}{4}\pi \quad (n \text{ は整数})$$

こちらで書けるのなら, 申し分ない.

$$(2) \quad \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow x = n\pi - \frac{\pi}{6} \quad (n \text{ は整数})$$

$$\text{☆別解} \quad x = n\pi + \frac{5}{6}\pi \quad (n \text{ は整数})$$

と書いてもよい.

$$\text{☆別解 2} \quad x = 2n\pi + \frac{5}{6}\pi, 2n\pi + \frac{11}{6}\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$\text{☆別解 3} \quad x = 2n\pi - \frac{\pi}{6}, 2n\pi - \frac{7}{6}\pi \quad (n \text{ は整数})$$

これらでもよい.

$$(3) \quad \sin \frac{2}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leq \frac{2}{3}x < 2\pi$ についての特殊解は, $\frac{2}{3}x = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$

よって一般解は,

$$\frac{2}{3}x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}, 2n\pi + \frac{2}{3}\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 3n\pi + \frac{\pi}{2}, 3n\pi + \pi \quad (n \text{ は整数})$$