

反射テスト 論理 同値な式変形 01

1. a, b は全て実数とする. このとき命題 p と命題 q が同値になるような条件は何か, 例にならって空欄をうめよ. 同値とは必要十分性が満たされることである. (S 級 1 分, A 級 1 分 40 秒, B 級 2 分 30 秒, C 級 3 分 30 秒)

	命題 p	必要十分性	命題 q	条件
例 (1)	$a = b$	$\Leftrightarrow$	$a - b = 0$	なし
例 (2)	$a^2 = 9$	$\Leftrightarrow$	$a = 3$	$a > 0$
(1)	$a = 0$	$\Leftrightarrow$	$a^2 = 0$	
(2)	$a = b$	$\Leftrightarrow$	$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$	
(3)	$a^2 = a$	$\Leftrightarrow$	$a = 1$	
(4)	$4a > 20$	$\Leftrightarrow$	$a > 5$	
(5)	$a = 2b$	$\Leftrightarrow$	$\frac{a}{b} = 2$	
(6)	$a : b = 3 : 2$	$\Leftrightarrow$	$2a = 3b$	
(7)	$\sqrt{a} = b$	$\Leftrightarrow$	$a = b^2$	
(8)	$ a = b $	$\Leftrightarrow$	$a^2 = b^2$	

2. a, b, c, d は全て実数とする. このとき命題 p と命題 q が同値になるような条件は何か, 例にならって空欄をうめよ. 同値とは必要十分性が満たされることである.
(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 3 分 40 秒, C 級 5 分)

	命題 p	必要十分性	命題 q	条件
例 (1)	$a = b$	$\Leftrightarrow$	$a - b = 0$	なし
例 (2)	$a^2 = 9$	$\Leftrightarrow$	$a = 3$	$a > 0$
(1)	$a = 1$	$\Leftrightarrow$	$a^2 = 1$	
(2)	$ca = cb$	$\Leftrightarrow$	$a = b$	
(3)	$a = b$	$\Leftrightarrow$	$\frac{a}{b} = 1$	
(4)	$a^2 = ab$	$\Leftrightarrow$	$a = b$	
(5)	$-a > 1$	$\Leftrightarrow$	$a < -1$	
(6)	$a > 2b$	$\Leftrightarrow$	$\frac{a}{b} > 2$	
(7)	$a : b = c : d$	$\Leftrightarrow$	$ad = bc$	
(8)	$a = b^2$	$\Leftrightarrow$	$b = \sqrt{a}$	
(9)	$a = b$	$\Leftrightarrow$	$\sqrt{a} = \sqrt{b}$	
(10)	$ a \leq b $	$\Leftrightarrow$	$a^2 \leq b^2$	

反射テスト 論理 同値な式変形 01 解答解説

1. a, b は全て実数とする. このとき命題 p と命題 q が同値になるような条件は何か, 例にならって空欄をうめよ. 同値とは必要十分性が満たされることである. (S 級 1 分, A 級 1 分 40 秒, B 級 2 分 30 秒, C 級 3 分 30 秒)

★ 必要条件と十分条件 「十分 $\Rightarrow$ 必要」 …主語に注目するのがポイント

十分性	$A \Rightarrow B$ (A は B であるための十分条件.)
必要性	$A \Leftarrow B$ (A は B であるための必要条件.)
必要十分性	$A \Leftrightarrow B$ (A は B であるための必要十分条件. A と B は 同値 である.)

★ 同値

「命題 p と命題 q が同値」とは「命題 p は命題 q であるための必要十分条件である」こと.

	命題 p	必要十分性	命題 q	条件
例 (1)	$a = b$	$\Leftrightarrow$	$a - b = 0$	なし
例 (2)	$a^2 = 9$	$\Leftrightarrow$	$a = 3$	$a > 0$
(1)	$a = 0$	$\Leftrightarrow$	$a^2 = 0$	なし
(2)	$a = b$	$\Leftrightarrow$	$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$	$c \neq 0$
(3)	$a^2 = a$	$\Leftrightarrow$	$a = 1$	$a \neq 0$ など
(4)	$4a > 20$	$\Leftrightarrow$	$a > 5$	なし
(5)	$a = 2b$	$\Leftrightarrow$	$\frac{a}{b} = 2$	$b \neq 0$
(6)	$a : b = 3 : 2$	$\Leftrightarrow$	$2a = 3b$	$ab \neq 0$
(7)	$\sqrt{a} = b$	$\Leftrightarrow$	$a = b^2$	$b \geq 0$
(8)	$ a = b $	$\Leftrightarrow$	$a^2 = b^2$	なし

☆ 注意. 答えは一通りではない. 例えば (2) は「 $c = 3$ 」など具体的な数値を考えることもできる. 答えはなるべく汎用性のあるものを選んだが, その辺に注意して○付けをしてほしい.

☆ これらの同値な式変形に留意できると必要十分性に関する証明が簡潔になることが多い.

☆ (3) 「 $a > 0$ 」でもよし.

☆ (5) 「 $a \neq 0$ 」でもよし.

☆ (6) 「 $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ 」でもよし. 単に「 $a \neq 0$ 」や「 $b \neq 0$ 」でもよし.

☆ (7) $a \geq 0$ は必要ない. 命題 p では $\sqrt{}$ 内なので a は 0 以上, 命題 q でも b^2 が 0 以上. $b \geq 0$ がないと必要性「 $\Leftarrow$ 」が満たされない. 例えば $b = -\sqrt{a}$ のとき命題 q は成立するが命題 p は不成立.

2. a, b, c, d は全て実数とする. このとき命題 p と命題 q が同値になるような条件は何か, 例にならって空欄をうめよ. 同値とは必要十分性が満たされることである.
(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 3 分 40 秒, C 級 5 分)

	命題 p	必要十分性	命題 q	条件
例 (1)	$a = b$	$\Leftrightarrow$	$a - b = 0$	なし
例 (2)	$a^2 = 9$	$\Leftrightarrow$	$a = 3$	$a > 0$
(1)	$a = 1$	$\Leftrightarrow$	$a^2 = 1$	$a > 0$ や $a \neq -1$ など
(2)	$ca = cb$	$\Leftrightarrow$	$a = b$	$c \neq 0$
(3)	$a = b$	$\Leftrightarrow$	$\frac{a}{b} = 1$	$b \neq 0$
(4)	$a^2 = ab$	$\Leftrightarrow$	$a = b$	$a \neq 0$
(5)	$-a > 1$	$\Leftrightarrow$	$a < -1$	なし
(6)	$a > 2b$	$\Leftrightarrow$	$\frac{a}{b} > 2$	$b > 0$
(7)	$a : b = c : d$	$\Leftrightarrow$	$ad = bc$	なし
(8)	$a = b^2$	$\Leftrightarrow$	$b = \sqrt{a}$	$b \geq 0$
(9)	$a = b$	$\Leftrightarrow$	$\sqrt{a} = \sqrt{b}$	$a \geq 0$
(10)	$ a \leq b $	$\Leftrightarrow$	$a^2 \leq b^2$	なし

☆ (1) どちらでも正解.

☆ (9) 「 $b \geq 0$ 」 や 「 $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ 」 でもよし.