

反射テスト 複素数 共役複素数と絶対値 応用 01

1. 次の条件を満たす z を求めよ. ただし, $\bar{z}$ は複素数 z の共役複素数, $|z|$ は複素数 z の絶対値とする. また, 複素数 $z = a + bi$ のとき, z の絶対値は $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ である. (S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$(1) \quad \begin{cases} z^2 \text{ が実数} \\ |z| = 4 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} z + \frac{1}{z} \text{ が実数} \\ z + \bar{z} = 1 \end{cases}$$

2. 次の条件を満たす z を求めよ. ただし, $\bar{z}$ は複素数 z の共役複素数, $|z|$ は複素数 z の絶対値とする. また, 複素数 $z = a + bi$ のとき, z の絶対値は $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ である. (S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$(1) \quad \begin{cases} z(z-1) \text{ が実数} \\ |z| = 2 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} z + \frac{4}{z} \text{ が実数} \\ z + \bar{z} = 2 \end{cases}$$

反射テスト 複素数 共役複素数と絶対値 応用 01 解答解説

1. 次の条件を満たす z を求めよ. ただし, $\bar{z}$ は複素数 z の共役複素数, $|z|$ は複素数 z の絶対値とする. また, 複素数 $z = a + bi$ のとき, z の絶対値は $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ である. (S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

★ 共役複素数の計算

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad z \text{ が実数} \Leftrightarrow z = \bar{z} \\ \textcircled{2} \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \quad (\text{複号同順}) \\ \textcircled{3} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ \textcircled{4} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (\text{ただし } z_2 \neq 0) \end{array} \right.$$

★ 複素数の絶対値 $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} z^2 \text{ が実数} \quad \cdots \textcircled{1} \\ |z| = 4 \quad \cdots \textcircled{2} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow z^2 = \overline{z^2} \quad (\because \text{共役複素数の計算 } \textcircled{1} \text{ 参照}) \\ &\Leftrightarrow z^2 - (\bar{z})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z + \bar{z})(z - \bar{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -\bar{z} \text{ 又は } z = \bar{z} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow z \bar{z} = 16$$

$$z = -\bar{z} \text{ のとき,}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } -z^2 = 16 \Leftrightarrow z = \pm 4i$$

$$z = \bar{z} \text{ のとき,}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } z^2 = 16 \Leftrightarrow z = \pm 4$$

$$\therefore z = \pm 4 \text{ 又は } z = \pm 4i$$

☆別解略

$z = x + yi$ と考えて 2 元連立方程式を解く.

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi \text{ より,}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } 2xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ 又は } y = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ から } x^2 + y^2 = 16$$

$$x = 0 \text{ のとき, } y = \pm 4$$

$$y = 0 \text{ のとき, } x = \pm 4$$

$$\therefore z = \pm 4 \text{ 又は } z = \pm 4i$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} z + \frac{1}{z} \text{ が実数} \\ z + \bar{z} = 1 \end{array} \right.$$

$$z + \frac{1}{z} \text{ が実数であり, 題意から } z \neq 0 \text{ であるから}$$

$$z + \frac{1}{z} = \overline{z + \frac{1}{z}}$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\Leftrightarrow z^2 \bar{z} + \bar{z} = z \bar{z}^2 + z$$

$$\Leftrightarrow z^2 \bar{z} - z \bar{z}^2 + \bar{z} - z = 0$$

$$\Leftrightarrow z \bar{z}(z - \bar{z}) - (z - \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z \bar{z} - 1)(z - \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow z \bar{z} = 1 \text{ 又は } z = \bar{z}$$

$$z \bar{z} = 1 \text{ のとき, 解と係数の関係から}$$

$$z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$z = \bar{z} \text{ のとき, } z + z = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}$$

$$\therefore z = \frac{1}{2} \text{ 又は } z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

☆別解略

$z = x + yi$ と考えて 2 元連立方程式を解く.

$$z + \bar{z} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= x + yi + \frac{1}{x + yi} \\ &= x + yi + \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

これが実数であるから,

$$y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ 又は } y = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ より } y \text{ を求めれば, } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 又は } y = 0$$

2. 次の条件を満たす z を求めよ. ただし, $\bar{z}$ は複素数 z の共役複素数, $|z|$ は複素数 z の絶対値とする. また, 複素数 $z = a + bi$ のとき, z の絶対値は $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ である. (S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$(1) \quad \begin{cases} z(z-1) \text{ が実数} & \cdots \textcircled{1} \\ |z| = 2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow z^2 - z = \overline{z^2 - z} \quad (\because \text{共役複素数の計算 } \textcircled{1} \text{ 参照}) \\ &\Leftrightarrow z^2 - (\bar{z})^2 - z + \bar{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow (z + \bar{z} - 1)(z - \bar{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow z + \bar{z} = 1 \text{ 又は } z = \bar{z} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow z\bar{z} = 4$$

$z + \bar{z} = 1$ のとき,
解と係数の関係から,

$$z^2 - z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$$

$z = \bar{z}$ のとき,

$$\textcircled{2} \text{ から } z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm 2$$

$$\therefore z = \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2} \text{ 又は } z = \pm 2$$

☆別解略

$z = x + yi$ と考えて 2 元連立方程式を解く.

$z(z-1) = (x^2 - x - y^2) + (2x-1)yi$ より,

$$\textcircled{1} \text{ から } (2x-1)y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ 又は } y = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ から } x^2 + y^2 = 4$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ のとき, } y = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$y = 0 \text{ のとき, } x = \pm 2$$

$$\therefore z = \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2} \text{ 又は } z = \pm 2$$

$$(2) \quad \begin{cases} z + \frac{4}{z} \text{ が実数} \\ z + \bar{z} = 2 \end{cases}$$

$z + \frac{4}{z}$ が実数であり, 題意から $z \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} z + \frac{4}{z} &= \overline{z + \frac{4}{z}} \\ &\Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = \bar{z} + \frac{4}{\bar{z}} \\ &\Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = \bar{z} + \frac{4}{\bar{z}} \\ &\Leftrightarrow z^2\bar{z} + 4\bar{z} = z\bar{z}^2 + 4z \\ &\Leftrightarrow z^2\bar{z} - z\bar{z}^2 + 4\bar{z} - 4z = 0 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z}(z - \bar{z}) - 4(z - \bar{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z\bar{z} - 4)(z - \bar{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \text{ 又は } z = \bar{z} \end{aligned}$$

$z\bar{z} = 4$ のとき, 解と係数の関係から

$$z^2 - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$z = \bar{z} \text{ のとき, } z + z = 2 \Leftrightarrow z = 1$$

$$\therefore z = 1 \text{ 又は } z = 1 \pm \sqrt{3}i$$

☆別解略

$z = x + yi$ と考えて 2 元連立方程式を解く.

$$z + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\begin{aligned} z + \frac{4}{z} &= x + yi + \frac{4}{x + yi} \\ &= x + yi + \frac{4(x - yi)}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

これが実数であるから,

$$\begin{aligned} y - \frac{4y}{x^2 + y^2} &= 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 4)y = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \text{ 又は } y = 0 \end{aligned}$$

$x = 1$ より y を求めれば,

$$y = \pm\sqrt{3} \text{ 又は } y = 0$$